

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CESARE PARENTI

Propagation des singularités C^∞ pour des opérateurs fuchsien

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A5_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPAGATION DES SINGULARITES C^∞ POUR DES
OPERATEURS FUCHSIENS

par C. PARENTI

On se propose de donner dans cet exposé certains résultats, contenus dans l'article [2] et concernant la propagation des singularités C^∞ pour des O.P.D. à caractéristiques multiples non-involutives qui généralisent des résultats précédents de Ivrii [4] et Hanges [3].

1. O.P.D. A CARACTERISTIQUES MULTIPLES NON-INVOLUTIVES

On se donne un O.P.D. classique $P \in L^m(Y)$ (Y variété C^∞ n -dimensionnelle) avec symbole $p(y, \eta) \sim p_m(y, \eta) + p_{m-1}(y, \eta) + \dots$. Supposons que sur $T^*Y \setminus 0$ (ou sur un ouvert conique) on ait la factorisation

$$p_m = q_1^{k_1} q_2^{k_2} e \quad (k_1, k_2 \text{ entiers positifs}),$$

où les $q_j(y, \eta)$, $j = 1, 2$, sont réelles et homogènes de degré 1 en η , avec $e \neq 0$ sur $T^*Y \setminus 0$. Posons $\Sigma_j = q_j^{-1}(0)$, et supposons $\Sigma_j \neq \emptyset$ et que le champ H_{q_j} , $\sum_{k=1}^n \eta_k \partial / \partial \eta_k$ soient indépendants sur Σ_j , $j = 1, 2$.

Si $k_j > 1$ on suppose en plus que P vérifie la condition de Levi par rapport à q_j (i.e. microlocalement près de Σ_j on peut écrire

$$P = \sum_{\nu=0}^{k_j} B_{\nu,j} Q_j^\nu \quad \text{avec } B_{\nu,j} \in L^{m-k_j}(Y) \text{ et } Q_j = q_j(y, D_y).$$

Etant donnée une distribution $u \in \mathcal{D}'(Y)$, on s'intéresse à l'étude de $WF(u) \setminus WF(Pu) \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ($WF(\cdot)$ est le spectre singulier C^∞). Le cas $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ étant bien connu, on considère ici le cas suivant :

$$\underline{\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \{q_1, q_2\} \neq 0 \text{ sur } \Sigma}$$

Dans le cadre C^∞ et pour $k_1 = k_2 = 1$, ce cas a été étudié par Ivriř [4], Alinhac [1] et Hanges [3].

On rappelle que dans le cadre analytique on a des résultats assez généraux établis par Miwa [6] et plus récemment par Ôaku [7] pour k_1, k_2 quelconques (et même sans conditions de Lévi sur les termes d'ordre inférieur).

Pour chaque $\rho_0 \in \Sigma$ on va noter par $\gamma_j(\rho_0) \subset \Sigma_j$, $j = 1, 2$ la bicaractéristique nulle du facteur q_j qui passe par ρ_0 . Dans le cas $k_1 = k_2 = 1$, on sait déjà que si $\rho_0 \in WF(u) \setminus WF(Pu)$ alors, localement, on a $\gamma_j(\rho_0) \subset WF(u) \setminus WF(Pu)$ pour au moins un j . On montrera que la même chose se passe dans le cas k_1, k_2 quelconques si les conditions de Levi sont vérifiées. Sans condition de Levi ce résultat est faux (il suffit de considérer dans $\mathbb{R}^n_{(t,x)}$ l'exemple $P = t^2 \partial_t - 1$ et de prendre $u(t,x) = Y(t)e^{-1/t} \otimes \varphi(x)$ avec $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x)$). On va supposer que $\{q_1, q_2\} < 0$ sur Σ (le cas $\{q_1, q_2\} > 0$ se traite d'une façon analogue); En utilisant un argument géométrique assez classique on peut se réduire à considérer le cas où $Y = \mathbb{R}^1_t \times \mathbb{R}^{n-1}_x$ (on note alors par $(t,x;\tau,\xi)$ les points de T^*Y) et la variété Σ_1 (resp. Σ_2) est donnée par l'équation $t = 0$ (resp. $\tau = 0$).

Dans cette situation, en utilisant les hypothèses faites, on prouve qu'on peut se réduire à étudier les deux cas suivants :

Cas $k_1 \geq k_2$:

$$P = \sum_0^{k_2} B_j t^{k_1 - k_2 + j} \partial_t^j + \sum_1^{k_1 - k_2} A_j t^{k_1 - k_2 - j},$$

avec $B_j \in L^{m-k_2}(\mathbb{R}^n)$, B_{k_2} elliptique près de Σ , et $A_j \in L^{m-k_2-j}(\mathbb{R}^n)$.

Cas $k_1 < k_2$

$$P = \sum_0^{k_1} B_j t^j \partial_t^{k_2 - k_1 + j} + \sum_0^{k_2 - k_1 - 1} A_j \partial_t^j$$

avec $B_j, A_j \in L^{m-k_2}(\mathbb{R}^n)$, B_{k_1} elliptique près de Σ .

Ensuite, on montre que l'équation $Pu = f$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, peut se traduire dans un système fuchsien :

$$(1) \quad \mathcal{P}\vec{v} = (t \partial_t I_N - \mathcal{A}(t,x,D_t,D_x))\vec{v} = \vec{g}, \quad N = \max(k_1, k_2),$$

où \mathcal{A} est une matrice $N \times N$ d'o.p.d. d'ordre 0, avec $WF(\vec{v}) = \bigcup_{j=1}^N WF(v_j) = WF(u)$ et $WF(\vec{g}) = WF(f)$ près de Σ . On va donner seulement deux exemples et on renvoie à [2] pour le cas général.

Exemple 1 :

$$Pu = (t^2 \partial_t + Bt + A)u = f, \quad B \in L^0, \quad A \in L^{-1}.$$

On pose $v_1 = u$, $v_2 = \Lambda tu$ où $\Lambda = (1 + |D_x|^2)^{1/2}$; alors

$$t \partial_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \partial_t \Lambda^{-1} \\ -[\Lambda, B]t - \Lambda A & I - B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda f \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

$$Pu = t \partial_t^2 + B \partial_t + A, \quad B, A \in L^0.$$

On pose $v_1 = u$, $v_2 = \partial_t u$ et l'on trouve que

$$t \partial_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -A & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Dans le cas général, si \mathcal{A} denote le symbole principal de \mathcal{A} , on montre que pour chaque $\rho = (0, x; 0, \xi) \in \Sigma$, $|\xi| = 1$, on a

$$\det(zI_N - \mathcal{A}(\rho)) = \begin{cases} (z+1)^{k_1-k_2} \sum_{j=0}^{k_2} \frac{b_j(\rho)}{b_{k_2}(\rho)} \zeta(\zeta-1)\dots(\zeta-(j-1)) \Big|_{\zeta = z-(k_1-k_2)}, & N = k_1 \\ z^{k_2-k_1} \sum_{j=0}^{k_1} \frac{b_j(\rho)}{b_{k_1}(\rho)} z(z-1)\dots(z-(j-1)), & N = k_2 \end{cases}$$

Il convient de remarquer que sauf dans le cas $k_1 = k_2$, la matrice $\mathcal{A}(\rho)$ a toujours la valeur propre $z = -1$, si $k_1 > k_2$, ou bien $z = 0$, si $k_1 < k_2$.

2. SYSTEMES FUCHSIENS

Les considérations faites dans le § 1 donnent une bonne motivation pour étudier des systèmes du type suivant

$$(2) \quad \mathcal{P}\vec{v} = (t\partial_t I_N - \mathcal{A}(t,x,D_t,D_x))\vec{v} = \vec{f},$$

où \mathcal{A} est une matrice $N \times N$ d'o.p.d. d'ordre 0 dont on va noter par $Q(t,x;\tau,\xi)$ le symbole principal.

Ce qui nous intéresse ici c'est le $WF(\vec{v}) \setminus WF(\vec{f})$ au voisinage des points $\rho \in \Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, où Σ_1 (resp. Σ_2) est donnée par l'équation $t = 0$ (resp. $\tau = 0$) dans $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$.

On associe à \mathcal{P} le polynôme indiciel :

$$(3) \quad I_{\mathcal{P}}(\rho;\zeta) = \det(\zeta I_N - Q(\rho)), \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad \rho = (0,x;0,\xi) \in \Sigma, \quad |\xi| = 1.$$

On a le théorème suivant :

Théorème 1 : On suppose que l'opérateur \mathcal{A} ne dépend pas de t et D_t dans un voisinage conique d'un point $\rho_0 \in \Sigma \setminus WF(\vec{f})$, $\rho_0 = (0,x_0;0,\xi^{(0)})$.

Posons :

$$\begin{cases} \gamma_{1,k}(\rho_0) = \{(0,x_0;\tau,\xi^{(0)}) \mid (-1)^k \tau > 0\} \\ \gamma_{2,k}(\rho_0) = \{(t,x_0;0,\xi^{(0)}) \mid (-1)^k t > 0\} \end{cases}, \quad k = 1,2$$

Alors :

i) Si pour chaque $j \in \{1,2\}$ il existe $k \in \{1,2\}$ tel que

$$\gamma_{j,k}(\rho_0) \cap WF(\vec{v}) = \emptyset, \quad \text{on a } \rho_0 \notin WF(\vec{v}).$$

ii) Si $I_{\mathcal{P}}(\rho_0;\zeta) \neq 0$ pour $\zeta \in \{0,1,2,\dots\}$ et si

$$(\gamma_1(\rho_0) \setminus \{\rho_0\}) \cap WF(\vec{v}) \neq \emptyset, \quad \text{on a } \rho_0 \notin WF(\vec{v})$$

Si $I_{\mathcal{P}}(\rho_0;\zeta) \neq 0$ pour $\zeta \in \{k+1, k+2, \dots\}$, pour un $k \geq 0$,

et si $(\gamma_1(\rho_0) \setminus \{\rho_0\}) \cap WF(\vec{v}) = \emptyset$, il existe des distributions :

$$\vec{v}_j(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^{n-1})^N, \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

telles que $\rho_0 \notin \text{WF}(\vec{v} - \sum_0^k t^j \otimes \vec{v}_j(x))$.

iii) Si $I_{\mathcal{P}}(\rho_0; \zeta) \neq 0$ pour $\zeta \in \{-1, -2, \dots\}$ et si

$$(\gamma_2(\rho_0) \setminus \{\rho_0\}) \cap \text{WF}(\vec{v}) = \emptyset, \quad \text{on a } \rho_0 \notin \text{WF}(\vec{v}).$$

Si $I_{\mathcal{P}}(\rho_0; \zeta) \neq 0$ pour $\zeta \in \{-h-1, -h-2, \dots\}$, pour un $h \geq 1$, et si
 $(\gamma_2(\rho_0) \setminus \{\rho_0\}) \cap \text{WF}(\vec{v}) = \emptyset$, il existe des distributions $\vec{w}_j(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^{n-1})^N$,
 $j = 0, \dots, h-1$, telles que

$$\rho_0 \notin \text{WF}(\vec{v} - \sum_0^{h-1} \partial_t^j \delta_t \otimes \vec{w}_j(x)).$$

Le théorème est bien connu dans le cas scalaire $N = 1$ (voir [3], [4]); le cas vectoriel se traite en adaptant au cas des systèmes les constructions explicites de microparamétrices faites par Hanges dans [3]. On renvoie à [2] pour plus de détails.

Il faut remarquer que l'hypothèse que l'opérateur \mathcal{A} ne dépend pas de t et D_t est essentielle (même dans le cas scalaire) pour pouvoir construire de paramétrices.

Le résultat crucial de [2] est le suivant :

Théorème 2 : Les conclusions i), ii), iii) du théorème 1 restent valables pour n'importe quel système (2).

L'idée naturelle pour démontrer le théorème 2 est de voir s'il existe une matrice $(N \times N)$ $Q(t, x, D_t, D_x)$ d'o.p.d. d'ordre 0, qui soit elliptique au voisinage de ρ_0 et telle que l'on ait :

$$(4) \quad (t \partial_t I_N - \mathcal{A}(t, x, D_t, D_x)) Q \equiv Q (t \partial_t I_N - \tilde{\mathcal{A}}(x, D)),$$

près de ρ_0 , avec $\tilde{\mathcal{A}}(\rho_0) = \mathcal{A}(\rho_0)$.

On voit immédiatement que dans le cas $N > 1$ il y a une obstruction non-triviale pour que ça marche. En effet, en imposant que (4) soit vérifiée on trouve en particulier que l'on doit choisir le symbole principal $q_0(t, x; \tau, \xi)$ de Q de telle façon que :

$$(5) \quad (t\partial_t - \tau\partial_\tau)q_0(t,x;\tau,\xi) - \\ - (\alpha(t,x;\tau,\xi)q_0(t,x;\tau,\xi) - q_0(t,x;\tau,\xi)\tilde{\alpha}(x,\xi)) = 0$$

Ecrivant formellement $q_0(t,x;\tau,\xi) \sim \sum_{j,k} t^j \tau^k q_{j,k}(x,\xi)$ et

$\alpha(t,x;\tau,\xi) \sim \sum_{j,k} t^j \tau^k a_{j,k}(x,\xi)$ ($a_{0,0} = \tilde{\alpha}$), on obtient alors une suite d'équations matricielles :

$$(6) \quad \begin{cases} q_{j,k}(x,\xi) ((j-k)I_N + \alpha(0,x;0,\xi)) - \alpha(0,x;0,\xi)q_{j,k}(x,\xi) \\ = \text{matrice qui dépend des } a_{j',k'} \text{ et des } q_{j',k'} \text{ pour } j' < j, k' < k \end{cases}$$

C'est bien connu qu'une telle équation est univoquement résoluble, pour $j \neq k$, si les deux matrices $(j-k)I_N + \alpha(0,x;0,\xi)$ et $\alpha(0,x;0,\xi)$ n'ont pas de valeurs propres communes. On est alors conduit à formuler la condition suivante :

$$(7) \quad \begin{cases} \text{Le système (2) satisfait la condition de Fuchs au point } \rho_0 \in \Sigma \text{ si les} \\ \text{racines } \zeta_1, \dots, \zeta_N \text{ de l'équation } I_{\mathcal{P}}(\rho_0; \zeta) = 0 \text{ sont telles que } \zeta_i - \zeta_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ \text{pour chaque } i, j, i \neq j. \end{cases}$$

Si la condition de Fuchs est vérifiée au point ρ_0 (ce qui est toujours le cas quand $N = 1$), on peut montrer que la conjecture qu'on a fait est vraie, c'est à dire qu'on peut transformer, en utilisant un o.p.d. elliptique Q , le système $t\partial_t I_N - \mathcal{K}(t,x,D_t, D_x)$ dans un système $t\partial_t I_N - \tilde{\mathcal{K}}(x, D_x)$ avec $\alpha(\rho_0) = \tilde{\alpha}(\rho_0)$ (tout ça est vrai dans un voisinage de ρ_0). Pour ce qui concerne la construction de Q on renvoie à [2] et on se limite ici à dire qu'elle se fait en deux étapes : avant tout on détermine le $q_{j,k}$ dans un (même) voisinage de (x_0, ξ_0) en utilisant le fait que pour $j \neq k$ les équations (6) sont résolubles au point ρ_0 . En utilisant le lemme de Borel on se ramène alors à résoudre une équation $(t\partial_t - \tau\partial_\tau)\hat{q} - (\alpha\hat{q} - \hat{q}\tilde{\alpha}) = \text{fonction plate sur } t = 0, \tau = 0$, ce qui se fait à la main.

Le cas où la condition de Fuchs n'est pas vérifiée est beaucoup plus délicat et pour surmonter la difficulté on s'est inspiré d'une idée de Kashiwara-Oshima [5], Th. 3.2.

Afin d'expliquer un peu la méthode suivie on va considérer la situation simple (mais typique !) suivante.

Lemme : Supposons que $a(\rho_0)$ soit de la forme :

$$(8) \quad a(\rho_0) = N_1 \left\{ \begin{array}{c|c} \underbrace{a_1(\rho_0)}_{N_1} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{a_2(\rho_0)}_{N_2} \end{array} \right\} N_2$$

$$\text{avec } a_1(\rho_0) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \ddots \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad a_2(\rho_0) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & * \\ & \ddots \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

On peut alors transformer le système $t\partial_t I_N - \mathcal{A}$ dans le système
 $t\partial_t I_N - C(t, x, D_t, D_x)$, avec $C(\rho_0) = a(\rho_0)$, et avec C de la forme :

$$(9) \quad C(t, x, D_t, D_x) = N_1 \left\{ \begin{array}{c|c} \underbrace{C_1(x, D_x)}_{N_1} & E(x, D_x)t \\ \hline F(x, D_x)\partial_t & \underbrace{C_2(x, D_x)}_{N_2} \end{array} \right\} N_2$$

où F est d'ordre -1 . De plus, si \mathcal{A} est triangulaire inférieure par blocs on
peut choisir $E = 0$.

La démonstration de ce lemme repose sur le fait que quand l'on veut résoudre les équations de transport (6) on a des problèmes si $j-k = \pm 1$ et que les extra-termes $E(x, D_x)t$ et $F(x, D_x)\partial_t$ sont introduits pour éliminer cette difficulté. Pour les détails on renvoie à [2].

Maintenant, si on est dans les conditions du lemme et si $(t\partial_t I_N - C)\vec{v} = \vec{f}$, on pose $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, $\vec{v}_j \in (\mathcal{D}')^{N_j}$ et l'on définit $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = t\vec{v}_2$, $\vec{w}_3 = \vec{v}_2$. On trouve alors que

$$t\partial_t \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{D}(t, x, D_t, D_x) \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ t\vec{f}_2 \\ \vec{f}_2 \end{pmatrix},$$

avec

$$(10) \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} C_1 & E & 0 \\ tF\partial_t & C_2+I & 0 \\ F\partial_t & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

On est maintenant dans le cas où $\mathcal{D}(t, x, D_t, D_x)$ est triangulaire inférieure par blocs et par une nouvelle application du Lemme on passe du système $t\partial_t - \mathcal{D}$ à un nouveau système $t\partial_t I_{N+N_2} - G$ avec :

$$(11) \quad G(t, x, D_t, D_x) = N \left\{ \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{pmatrix} G_1(x, D_x) & 0 \\ \hline F(x, D_x) & \partial_t \end{pmatrix}}^N & \begin{pmatrix} 0 \\ \hline G_2(x, D_x) \end{pmatrix} \\ \hline & \underbrace{}_{N_2} \end{array} \right\}_{N_2}$$

où F est d'ordre -1 .

Finalement, si $(t\partial_t I - G)\vec{u} = \vec{g}$, écrivant $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et en posant $\vec{\varphi}_1 = \vec{u}_1$, $\vec{\varphi}_2 = \partial_t \vec{u}_1$, $\vec{\varphi}_3 = \vec{u}_2$, on trouve que $\vec{\varphi} = (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \vec{\varphi}_3)$ satisfait le système $t\partial_t \vec{\varphi} - \tilde{\mathcal{A}}(x, D_x)\vec{\varphi} = \vec{h}$, avec

$$(12) \quad \tilde{\mathcal{A}}(x, D_x) = \begin{pmatrix} G_1(x, D_x) & 0 & 0 \\ 0 & G_1(x, D_x) - I & 0 \\ 0 & F(x, D_x) & G_2(x, D_x) \end{pmatrix}, \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \partial_t \vec{g}_2 \\ \vec{g}_2 \end{pmatrix}$$

A ce moment-là il suffit de noter que le polynôme indiciel du système $t\partial_t I_{2N+N_2} - \tilde{\mathcal{A}}$, au point ρ_0 , a les mêmes racines λ et $\lambda - 1$ du polynôme indiciel original et que $WF(\vec{\varphi}) = WF(\vec{v})$ et $WF(\vec{f}) = WF(\vec{h})$ près de ρ_0 . On peut alors appliquer le Théorème 1 au système $t\partial_t - \tilde{\mathcal{A}}$ et en déduire les propriétés pour $WF(\vec{v})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Alinhac : Parametrix et propagation des singularités pour un problème de Cauchy à multiplicité variable, *Astérisque*, 34-37 (1976), 3-26.
- [2] A. Bove, J. E. Lewis, C. Parenti : Article à paraître.
- [3] N. Hanges : Parametrix and propagation of singularities for operators with non-involutive characteristics, *Indiana Univ. Math. J.*, 28 (1979), 86-97.

- [4] V. Ya. Ivriĭ : Wave fronts of solutions of certain pseudo differential equations, Trans. Moscow Math. Soc., 1 (1981), 49-86.
- [5] M. Kashiwara, T. Oshima : Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Annals of Math., 106 (1977), 195-200.
- [6] T. Miwa : Propagation of microanalyticity for solutions of pseudodifferential equations, I, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 10 (1975), 521-533.
- [7] T. Ôaku : A canonical form for a system of microdifferential equations with non-involutory characteristic and branching of singularities, Invent. Math., 65 (3) (1982), 491-525.

*
* *
*