JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GUY MÉTIVIER

Estimation du reste en théorie spectrale

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A1_0>

ESTIMATION DU RESTE EN THEORIE SPECTRALE

by G. METIVIER

Cet exposé est consacré à l'étude de la résolvante de problèmes aux limites très classiques. Un des objectifs de ce travail est d'aborder le problème du meilleur reste dans la formule asymptotique donnant les valeurs propres de problèmes aux limites d'ordre élevé : en effet, les méthodes hyperboliques en vigueur n'ont pu être utilisées, semble-t-il, que pour des problèmes d'ordre deux (Seeley [6]).

Plus précisément soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à bord C^∞ ; soit $\mathcal{A}(x,D_x)$ un opérateur d'ordre m, elliptique et formellement autoadjoint positif sur un voisinage de $\bar{\Omega}$; soit enfin A une réalisation positive autoadjointe de $\mathcal{A}$ dans $L^2(\Omega)$. On note $E(\lambda)$ la résolution de l'identié de A, $e(\lambda;x,y)$ la fonction spectrale et $N(\lambda) = \operatorname{tr} E(\lambda) = \int_\Omega e(\lambda;x,x)dx$ le nombre de valeurs propres de A inférieures à λ. Enfin on désigne par $a(x,\xi)$ le symbole principal de $\mathcal{A}$ et on pose :

$$c(x) = (2\pi)^{-n} \int_{a(x,\xi)\leqslant 1} d\xi \quad ; \; c(\Omega) = \int_\Omega c(x)dx$$

sans faire de bibliographie complète, rappelons les résultats suivants :

Théorème 1 (Hörmander [3]) :

$$e(\lambda;x,x) = c(x)\, \lambda^{n/m} + O(\lambda^{(n-1)/m}$$

L'estimation est uniforme sur les compacts et par intégration on en déduit tout de suite "l'estimation optimale" :

$$N(\lambda) = c(\Omega)\, \lambda^{n/m} + O(\lambda^{(n-1)/m}) \qquad (*)$$

dans le cas d'un opérateur elliptique sur une variété compacte sans bord.

Théorème 2 (Seeley [6]) : L'estimation (*) est satisfaite pour les problèmes aux limites d'ordre 2.

Pour des problèmes aux limites (sur des ouverts ou variétés à bord) d'ordre $m > 2$, l'estimation (*) n'est pas (encore) démontrée dans le cas général et l'estimation la plus générale connue est :

Théorème 3 (Brüning [2]) :

$$N(\lambda) = c(\Omega)\, \lambda^{n/m} + O(\lambda^{(n-1)/m} \operatorname{Log} \lambda)$$

La première partie de cet exposé est consacrée à une démonstration du théorème 1 par des "méthodes de résolvante". Quitte à élever A à une puissance convenable on supposera que $m > n$ ce qui a pour effet de nous assurer que le noyau $r_\mu(x,y)$ de la résolvante $R_\mu = (A - \mu)^{-1}$ est continu sur $\Omega \times \Omega$. On a alors :

Théorème 4 : Il existe une fonction $b(x,\xi)$ homogène de degré m-1 en ξ et pour tout compact $\overline{\omega} \subset \Omega$, une constante C telles que :

$$\forall\, x \in \overline{\omega}, \forall \mu \in \mathbb{C} \quad \text{vérifiant} \quad |\mu| \geqslant 1 \text{ et } \delta(\mu) \geqslant |\mu|^{-1/m}$$

$$\left| r_\mu(x,x) - (2\pi)^{-n} \int \left(\frac{1}{a(x,\xi) - \mu} + \frac{b(x,\xi)}{(a(x,\xi)-\mu)^2} \right) d\xi \right| \leqslant C \frac{|\mu|^{n/m-1-2/m}}{\delta(\mu)^2}$$

Dans cet énoncé $\delta(\mu)$ désigne la distance de $\frac{\mu}{|\mu|}$ au demi axe réel positif.

Remarques - 1 - L'estimation est tout à fait classique lorsque $\delta(\mu) \geqslant$ constante > 0. Toute la difficulté est de faire l'étude pour μ "voisin du réel", c'est-à-dire pour $|\mu|^{-1/m} \leqslant \delta(\mu) \leqslant 1$.

- 2 - Le théorème donne deux termes, mais on pourrait tout aussi bien donner un développement asymptotique complet de $r_\mu(,x)$, comme Robert [5]. L'amélioration décisive par rapport à [5] est une meilleure estimation de l'erreur (pour deux termes ici, $\delta(\mu)^{-2}$ au lieu de $\delta(\mu)^{-3}$). L'estimation du théorème 4 semble d'ailleurs optimale.

- 3 - Le théorème 1 résulte bien du théorème 4 en utilisant comme Agmon [1] l'inégalité :

$$\left| e(\lambda;x,x) - \int_L r_\mu(x,x)\,d\mu \right| \leqslant c\,\tau\, \left| r_{\lambda+i\tau}(x,x) \right|$$

L étant un arc de cercle joignant $\lambda + i\tau$ à $\lambda - i\tau$ dans $\mathbb{C} \setminus [0,\infty[$. (On prend bien sûr $\tau = \lambda^{1-1/m}$).

Pour démontrer le théorème 4 on introduit d'abord autour de x^o une phase adaptée à l'opérateur (Hörmander [3]). Ici on choisit $\phi(x,\theta)$, homogène de degré 1 en θ, telle que :

$$a(x,d_x\phi(x,\theta)) = |\theta|^m \,, \qquad \det \phi''_{x,\phi} \neq 0$$

Posons $\phi(x,y,\theta) = \phi(x,\phi) - \phi(y,\theta)$. Un ingrédient essentiel est d'estimer des intégrales du type :

$$u(x,y) = \int e^{i\phi(x,y,\theta)} p(x,y,\theta) \frac{d\theta}{(|\theta|^m - \mu)^j} \quad .$$

<u>Lemme</u> : Si p est d'ordre k, à support dans un petit voisinage de (x^o,x^o), pour $-\frac{n}{2} < s+k < mj - n/2$ on a :

$$\|u\ (\cdot,y)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = O\left(|\mu|^{\frac{n}{2}+k+s-mj)/m} (\delta(\mu))^{-j+1/2}\right)$$

Ensuite on construit la résolvante sous forme d'un pseudo-différentiel avec phase ϕ :

$$R_\mu = \int e^{i\phi(x,y,\theta)} \left(\frac{b_o}{(|\theta|^m - \mu)} + \frac{b_1}{(|\theta|^m - \mu)^2} + \dots\right) d\theta$$

Dans la deuxième partie de l'exposé on aborde véritablement les problèmes aux limites, en construisant des noyaux de Poisson. Pour cela on supposera $m > 2n$ et on considérera des conditions aux limites de Dirichlet.

Pour construire les opérateurs K^j_μ tels que

$$\begin{cases} (A-\mu)K^j_\mu = 0 & \text{dans } \Omega \\ \gamma_\ell K^j_\mu = \delta_{j,\ell}\,\mathrm{Id} & \text{sur } \partial\Omega \text{ , pour } 0 \leqslant \ell,j \leqslant \frac{m}{2} - 1 \end{cases}$$

on peut (pour μ loin du réel) utiliser une factorisation

$$a(x,\xi',\xi_n) - \mu = a^+_\mu(x, \xi', \xi_n) a^-_\mu(x,\xi',\xi_n)$$

où $a^\pm_\mu$ sont des polynômes de degré $\frac{m}{2}$ en ξ_n, ayant leur racines dans $\pm \operatorname{Im} \xi_n > 0$. (On suppose ici que $\mathcal{R} = \{x_n > 0\}$, au moins près d'un point x^o).

Pour μ près du réel cette factorisation peut devenir singulière (coefficients de $a^\pm_\mu$ non bornés dans $C^\infty(x, \xi')$), et ceci à cause des racines réelles multiples lorsque $\mu = 1$. Dans un premier temps, on peut regarder la situation la plus simple en faisant l'hypothèse :

(H) $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } (x,\xi) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^n \text{, tout } \nu \text{ conormal en } x \\ \text{à } \partial\Omega \text{ l'équation en } \zeta \in \mathbb{C} \quad a(x, \xi + \zeta\nu) = 1 \text{ a au plus deux} \\ \text{racines réelles (avec leur multiplicité).}\end{array}\right.$

Fixons un voisinage $\tilde{\Omega}$ de $\bar{\Omega}$ et notons $\tilde{R}_\mu$ la résolvante du problème de Dirichlet pour $\mathcal{A}$ sur Ω. On peut appliquer le théorème 4 à $\tilde{R}_\mu$ sur Ω. Par ailleurs on a :

$$R_\mu = \tilde{R}_\mu - G_\mu \qquad \text{avec } G_\mu = \sum_{j \leqslant \frac{m}{2} - 1} K^j_\mu \gamma_j \tilde{R}_\mu$$

Sous les hypothèses que nous avons faites on a :

<u>Théorème 5</u> : Le noyau de l'opérateur de Green singulier G_μ est continu sur $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$; il existe C et $\rho < 1$ tels que pour tout μ vérifiant $|\mu| \geqslant 1$, et $\delta|\mu| \geqslant |\mu|^{-1/m}$ on ait :

$$\left| \int_\Omega G_\mu(x,x)\,dx \right| \leqslant C|\mu|^{n/m-1} \left\{ \frac{|\mu|^{-1/m}}{\delta(\mu)^\rho} + \frac{|\mu|^{-2/m}}{\delta(\mu)^2} \right\}.$$

On en déduit alors :

<u>Théorème 6</u> : Sous les mêmes hypothèses, l'estimation (*) est satisfaite.

Enfin la dernière partie de l'exposé est consacrée à la comparaison de deux problèmes aux limites : supposons que A_1 et A_2 sont deux réalisations du même opérateur $\mathcal{A}$ de domaine :

$$D(A_j) = \{u \in H^m(\Omega) \mid \gamma u \in X_j\}$$

γ étant l'application trace de $H^m(\Omega)$ sur $X = \prod_{j=o}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$, et X_j $(j = 1,2)$ étant des sous-espaces fermés de X.

Notons $N_j(\lambda)$ $(j = 1,2)$ le nombre de valeurs propres de A_j inférieures à λ Le théorème suivant s'obtient par des considérations de min-max en s'inspirant d'une formule de comparaison de [4] :

Théorème 7 : Si la fonction $N_1(\lambda)$ satisfait l'estimation (*), il en est de même pour $N_2(\lambda)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon : Asymptotic formulas with remainder estimates, Arch. Rat. Mech. Anal. 28 (1968) p.165-183.

[2] J. Brüning : Zur Abschätzung der Spektralfuktion elliptischer Operatoren ; Math. Zeit., 137 (1974) p. 75-85.

[3] L. Hörmander : The spectral function of an elliptic operator; Acta Math. 21 121 (1968) p. 193-218.

[4] G. Métivier : Valeurs propres de problèmes aux limites irréguliers ; Bull. Soc. Math. France, Mémoire 51-52 (1977), p. 125-219.

[5] D. Robert : Thèse, Université de Nantes (1977).

[6] R. Seeley : An estimate near the boundary for the spectral function of the Laplace operator; Amer. J. Math. 102 (1980), p.869-902.

*
* *
*