

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

NORIO SHIMAKURA

## La première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1981), p. 1-9

<[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1981\\_\\_\\_\\_AS14\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____AS14_0)>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

La première valeur propre du laplacien  
pour le problème de Dirichlet

par

Norio SHIMAKURA

1. Soit  $\mathbb{R}^n$  l'espace euclidien réel de dimension  $n$  ( $\geq 2$ ) à coordonnées  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et à produit scalaire  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ . Soit  $\Omega$  un domaine (ouvert connexe) borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière  $S$ . Supposons que  $\Omega$  soit situé, à chaque point de  $S$ , à un seul côté de  $S$ . La première valeur propre  $\lambda_1(\Omega)$  du laplacien pour le problème de Dirichlet dans  $\Omega$  est le nombre positif pour lequel il existe une et une seule fonction  $U$  définie sur  $\overline{\Omega}$  telle que  $U > 0$  et  $\Delta U + \lambda_1(\Omega)U = 0$  dans  $\Omega$ , que  $U = 0$  sur  $S$  et que sa norme dans  $L^2(\Omega)$  soit égale à 1. Nous appelons  $U$  la première fonction propre positive et normalisée.  $\lambda_1(\Omega)$  est toujours simple, c'est-à-dire, de multiplicité 1.

G.Faber [1] et E.Krahn [2] ont établi l'inégalité isopérimétrique pour  $\lambda_1$ . G.Pólya-G.Szegő [3] ont démontré que  $\lambda_1$  est diminuée par symétrisation du domaine par rapport aux hyperplans. Plus récemment, H.Brascamp-E.Lieb [8] ont démontré une propriété de convexité de  $\lambda_1$  restreinte à des domaines convexes comme nous l'écrirons plus tard. Voir aussi [6], [9] et [11] sur les autres problèmes isopérimétriques liés à  $\lambda_1$ .

Dans cet exposé, nous regardons ce qui arrive à  $\lambda_1$  par des déformations locales du domaine. La méthode utilisée pour ce but est la formule de variation due à J.Hadamard ([5]. Voir aussi [12]).

2. Supposons que  $S$  ( pas nécessairement connexe ) soit de classe  $C^m$  ( $m \geq 3$ ) par morceau. Désignons par  $S^{(m)}$  la partie  $C^m$  de  $S$ , c'est-à-dire,  $x \in S$  appartient à  $S^{(m)}$  s'il existe un voisinage de  $x$  dans  $S$ ,  $C^m$ -difféomorphe à une boule de dimension  $n-1$ . A chaque  $x \in S^{(m)}$ , écrivons par  $n(x) = (n_1(x), \dots, n_n(x))$  le vecteur unité normal intérieur à  $S$  en  $x$ . L'élément de volume sur  $S$  ( ou plutôt sur  $S^{(m)}$  ) est noté par  $dS$ .

Désignons par  $\text{Difféo}(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble de tous les difféomorphismes de classe  $C^m$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même. Soit  $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \rightarrow \phi_t \in \text{Difféo}(\mathbb{R}^n)$  une courbe de classe  $C^2$  en  $t$ . Nous supposons que  $\phi_0$  soit égal à l'identité  $I$  et que  $\phi_t - I$  soit nul dans un voisinage fixe de  $S \setminus S^{(m)}$  pour  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Nous posons

$$v = \frac{d}{dt} \phi_t |_{t=0} \quad \text{et} \quad w = \left( \frac{d}{dt} \right)^2 \phi_t |_{t=0} . \quad (1)$$

Alors,  $v$  et  $w$  sont des champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous écrivons

$$L^v = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \tilde{w} = w - L^v v . \quad (2)$$

Soit encore  $\theta$  une fonction sur  $S$  définie par

$$\theta = (\text{div } v) |_{S} \langle v |_{S, n} \rangle + {}^t M^v [ \langle v |_{S, n} \rangle ] + \langle \tilde{w} |_{S, n} \rangle , \quad (3)$$

où  $M^v$  est la partie tangentielle de  $L^v$  sur  $S$  et  ${}^t M^v$  est son adjoint comme opérateur sur  $S$ .

Soit, d'autre part,  $\varphi$  une fonction sur  $S$  ayant le support compact dans  $S^{(m)}$ . Déterminons le nombre  $\lambda'$  par

$$\lambda' = \int_S \varphi \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)^2 dS$$

et notons par  $w_\varphi$  la solution unique du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta w_\varphi + \lambda'_1(\Omega) w_\varphi = \lambda' U \quad \text{dans } \Omega , \\ w_\varphi = \varphi \frac{\partial U}{\partial n} \quad \text{sur } S \quad \text{et} \quad w_\varphi \perp U \quad \text{dans } L^2(\Omega) . \end{cases} \quad (4)$$

Nous pouvons définir une forme quadratique  $Q$  par

$$Q(\varphi) = \int_S w_\varphi \left( H - \frac{\partial}{\partial n} \right) w_\varphi dS, \quad (5)$$

où  $H(x)/(n-1)$  est la courbure moyenne de  $S^{(m)}$  au point  $x$ , autrement dit, si  $\rho(x)$  est la distance de  $x \in \overline{\Omega}$  jusqu'à  $S^{(m)}$ ,  $H(x) = -(\Delta \rho)(x)$  si  $x \in S^{(m)}$ .

Alors, nous avons la

Proposition 1 Sous les hypothèses ci-dessus, nous avons

$$\frac{d}{dt} \lambda_1(\phi_t \Omega) \Big|_{t=0} = \int_S \langle v|_{S,n} \rangle \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)^2 dS \quad (\text{formule d'Hadamard}), \quad (6)$$

$$\left( \frac{d}{dt} \right)^2 \lambda_1(\phi_t \Omega) \Big|_{t=0} = 2Q(\langle v|_{S,n} \rangle) + \int_S \theta \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)^2 dS. \quad (7)$$

( Dans [4], une formule analogue à (7) est obtenue pour le cas  $n=2$  ).

L'idée de la démonstration : Etant donnée une fonction  $f$  sur  $\overline{\Omega}$ , nous posons

$$A_t f = -(\phi_t)_* \circ \Delta \circ (\phi_t^{-1})_* f, \quad \text{où } (\phi_t)_* f(x) = f(\phi_t x).$$

Soit  $U_t = (\phi_t)_* \tilde{U}_t$ , où  $\tilde{U}_t$  est la première fonction propre positive et normalisée pour le domaine  $\phi_t \Omega$ . Alors nous avons

$$A_t U_t = \lambda_1(\phi_t \Omega) U_t \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad U_t = 0 \quad \text{sur } S.$$

La simplicité de  $\lambda_1$  nous permet de considérer les dérivées en  $t$  de  $\lambda_1(\phi_t \Omega)$  et de  $U_t$ , et nous obtenons les deux équations

$$\Delta U' + \lambda_1(\Omega) U' = -\lambda' U + A' U \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad U' = 0 \quad \text{sur } S, \quad (8)$$

$$\Delta U'' + \lambda_1(\Omega) U'' = -\lambda'' U + A'' U + 2A' U' - 2\lambda' U' \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad U'' = 0 \quad \text{sur } S, \quad (9)$$

où les  $\lambda'$  et  $\lambda''$  sont les membres à gauche de (6) et de (7) respectivement,

$$A' = \frac{d}{dt} A_t \Big|_{t=0} = [\Delta, L^v], \quad A'' = \left( \frac{d}{dt} \right)^2 A_t \Big|_{t=0} = [L^v, A'] + [\Delta, L^{\tilde{w}}],$$

$$U' = \frac{d}{dt} U_t |_{t=0} \quad \text{et} \quad U'' = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 U_t |_{t=0} .$$

Pour que les équations (8) et (9) admettent des solutions  $U'$  et  $U''$ , il faut et il suffit que leurs membres à droite soient orthogonaux à  $U$  dans  $L^2(\Omega)$ . Ces conditions d'orthogonalité nous donnent, par un calcul, les formules (6) et (7) ( Notons que  $W = L^v U - U'$  n'est autre que  $W_\varphi$  dans (4) pour  $\varphi = \langle v |_{S, n} \rangle$  ).

3. Soit  $\Sigma$  un ouvert non vide quelconque de  $S^{(m)}$ . Désignons par  $\Phi(\Sigma)$  l'espace vectoriel des fonctions réelles  $\varphi$  sur  $S$ , à supports compacts dans  $\Sigma$ , intégrables sur  $S$  et telles que  $\int_S \varphi dS = 0$ . Nous disons que  $v$  appartient à  $V(\Sigma)$  si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(V.1)  $v$  est une fonction de classe  $C^m$  sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans lui-même et à support compact dans le complémentaire de  $S \setminus \Sigma$  ;

(V.2)  $\langle v |_{S, n} \rangle \in \Phi(\Sigma)$  ; (V.3)  $\langle v |_{S, n} \rangle (\text{div } v) |_{S} \in \Phi(\Sigma)$ .

Soient  $v \in V(\Sigma)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ecrivons par  $\text{Exp}(tv)x$  la solution unique  $y(t, x)$  de  $y(0, x) = x$  et de  $\partial y(t, x) / \partial t = v(y(t, x))$ . Pour  $t$  fixe,  $\text{Exp}(tv)$  appartient à  $\text{Difféo}(\mathbb{R}^n)$  et il ne bouge pas  $S \setminus \Sigma$ . Remarquons que la première et la seconde dérivées en  $t$  du volume de  $\text{Exp}(tv)\Omega$  sont nulles pour  $t=0$ . Remarquons aussi que  $\tilde{w} = 0$  pour  $\phi_t = \text{Exp}(tv)$  ( voir (1) et (2) ci-dessus ).

Maintenant, nous restreignons les formules (6) et (7) à des  $\text{Exp}(tv)$ .

4. Nous disons que  $\Omega$  est un domaine  $\Sigma$ -critique pour  $\lambda_1$  si et seulement si

$$\frac{d}{dt} \lambda_1(\text{Exp}(tv)\Omega) |_{t=0} = 0 \quad \text{pour tout } v \in V(\Sigma).$$

La formule (6) nous donne tout de suite la

Proposition 2  $\Omega$  est un domaine  $\Sigma$ -critique pour  $\lambda_1$  si et seulement s'il existe une constante positive  $k$  telle que  $\partial U / \partial n = k$  sur  $\Sigma$ .

Comme un corollaire d'un théorème de J.Serrin [7], il est connu que  $\Omega$  est forcément une boule si  $\partial U/\partial n$  est égale à une constante partout sur  $S$ . Donc, aucun domaine  $\Omega$  autre que des boules n'est  $S$ -critique pour  $\lambda_1$ .

Nous disons que la fonction  $\lambda_1$  est  $\Sigma$ -stable en  $\Omega$  si et seulement si  $\Omega$  est  $\Sigma$ -critique pour  $\lambda_1$  et si

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \lambda_1(\text{Exp}(tv)\Omega)\Big|_{t=0} > 0 \text{ pour tout } v \in V_*(\Sigma),$$

où  $V_*(\Sigma)$  est le sous-ensemble de  $V(\Sigma)$  formé par tous les  $v$  avec  $\langle v|_{S,n} \rangle$  non identiquement nulles. Mais s'il s'agit du cas où  $\Sigma=S$ , c'est-à-dire, si  $\Omega$  est une boule, on doit exclure de  $V_*(S)$  tous les éléments de la forme  $v(x) = Ax+b$ , où  $A$  sont des matrices constantes réelles antisymétriques et  $b$  sont des vecteurs constants de  $\mathbb{R}^n$ . En ce sens, nous pouvons vérifier que  $\lambda_1$  est en effet  $S$ -stable en  $\Omega$  si  $\Omega$  est une boule.

Lemme Soit  $\Omega$  un domaine  $\Sigma$ -critique pour  $\lambda_1$ . Alors nous avons

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \lambda_1(\text{Exp}(tv)\Omega)\Big|_{t=0} = 2Q(\langle v|_{S,n} \rangle) \text{ pour tout } v \in V(\Sigma). \quad (10)$$

Preuve : Dans (7), nous avons d'abord  $\tilde{w}=0$ , et de plus  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ , où  $\theta_1 = \langle v|_{S,n} \rangle (\text{div } v)|_S$  et  $\theta_2 = {}^t M^v[\langle v|_{S,n} \rangle]$ . Puisque  $\partial U/\partial n = k$  sur  $\Sigma$ , l'intégrale de  $\theta_2$  sur  $S$  est nulle, car  $\langle v|_{S,n} \rangle$  est à support compact dans  $\Sigma$ . Et l'intégrale de  $\theta_1$  sur  $S$  s'annule aussi grâce à (V.3), d'où nous avons (10).

5. Théorème Soit  $\Sigma$  un ouvert non vide de  $S^{(m)}$ . Supposons que  $\Omega$  soit un domaine  $\Sigma$ -critique pour  $\lambda_1$ . Alors, pour chaque point  $x^0$  de  $\Sigma$ , il existe un ouvert  $\Sigma'$  de  $\Sigma$ , contenant  $x^0$ , tel que  $\lambda_1$  soit  $\Sigma'$ -stable en  $\Omega$ .

Démonstration : Fixons un petit nombre  $r^0 > 0$  tel que  $\Sigma(r) = \{x \in \Sigma; |x - x^0| < r\}$  soit connexe pourvu que  $0 < r \leq r^0$  et que  $\Sigma \setminus \overline{\Sigma(r^0)}$  soit non vide.

Soit  $\varphi$  un élément de  $\Phi(\Sigma(r^0)) \cap H^{1/2}(S^{(m)})$  et désignons par  $Z_\varphi$  la fonction harmonique dans  $\Omega$  ayant la valeur au bord  $k\varphi$  sur  $S$ , où  $H^a(D)$  est en général l'espace de Sobolev d'ordre  $a$  sur  $D$ . Nous posons

$$Q^0(\varphi) = - \int_S Z_\varphi \frac{\partial}{\partial n} Z_\varphi \, dS = \int_\Omega |\text{grad } Z_\varphi|^2 \, dx.$$

Il est facile à voir que  $|Q(\varphi) - Q^0(\varphi)| \leq C_1 \|\varphi\|^2$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme dans  $L^2(S^{(m)})$  et  $C_1 (> 0)$  est une constante qui ne dépend que de  $(x^0, r^0)$ . Ensuite, puisque  $\Sigma \setminus \Sigma(r^0)$  est non vide et que  $\varphi$  y est nulle,  $Q^0(\varphi) \geq C_2 \|\varphi\|_{1/2}^2$ , où  $\|\cdot\|_{1/2}$  est la norme dans  $H^{1/2}(S^{(m)})$  et  $C_2 (> 0)$  est une constante qui ne dépend que de  $(x^0, r^0)$ . Nous nous bornons maintenant à des  $\varphi$  à supports dans  $\Sigma(r)$  ( $0 < r \leq r^0$ ). Alors, par transformation de Fourier, on montre que  $\|\varphi\|_{1/2}^2 \geq (C_3/r) \|\varphi\|^2$ , où  $C_3 (> 0)$  est une constante dépendante de  $(x^0, r^0)$  mais indépendante de  $r$  si  $0 < r \leq r^0$ . Choisissons un  $r$  tel que  $C_4 = (C_2 C_3/r) - C_1 > 0$ . Alors nous avons  $Q(\varphi) \geq C_4 \|\varphi\|^2$  si  $\varphi$  a son support dans  $\Sigma(r)$ . Donc,  $\lambda_1$  est  $\Sigma(r)$ -stable en  $\Omega$ .

6. Exemple. Considérons un domaine annulaire  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; a < |x| < b\}$ , où  $0 < a < b < +\infty$ .  $S = \partial\Omega$  est la somme disjointe de  $S^+ = \{|x| = b\}$  et de  $S^- = \{|x| = a\}$ .  $\Omega$  est  $S^+$ -critique et  $S^-$ -critique pour  $\lambda_1$ , car  $U(x)$  ne dépend que de  $|x|$ . Mais  $\lambda_1$  n'est ni  $S^+$ -stable ni  $S^-$ -stable en  $\Omega$ , car  $\lambda_1(\Omega) > \lambda_1(\Omega_y)$  si  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \neq 0$  et si  $|y|$  est petite, où  $\Omega_y = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-y| > a \text{ et } |x| < b\}$ .

Cette dernière assertion est démontrée comme suit : Soit  $v$  un champ de vecteurs qui est égal à  $y$  près de  $S^-$  et à nul près de  $S^+$ . Par un calcul au moyen des fonctions de Bessel, nous voyons que  $Q(\langle v|_S, n \rangle) = -c|y|^2$  avec une constante  $c > 0$ . Ceci signifie que  $\lambda_1(\Omega) > \lambda_1(\Omega_y)$  si  $|y|$  est petite.

( Le contenu essentiel du § au § 6 a été annoncé dans [13] ).

7. Pour tirer le meilleur parti de la formule d'Hadamard, il est souhaitable de connaître dans quel endroit  $\partial U/\partial n$  est grande ou petite comme fonction sur  $S$ . Pour des domaines convexes, nous en avons une information suivante ( mais pas ponctuelle ):

Théorème de H.Brascamp-E.Lieb [8] Soient A et B deux domaines convexes et bornés quelconques de  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $[0,1] \ni \theta \rightarrow \lambda_1(\theta A + (1-\theta)B)$  est une fonction convexe, où  $aA + bB = \{ax + by; x \in A \text{ et } y \in B\}$  pour  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$  ( Grâce à l'homogénéité  $\lambda_1(aA) = a^{-2} \lambda_1(A)$  pour  $a > 0$ , nous avons de plus la concavité de  $\lambda_1^{-1/2}(\theta A + (1-\theta)B)$  ).

Soit  $\Omega$  un domaine strictement convexe et borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière régulière  $S$ . Nous appliquons ce théorème à des  $\theta cA + (1-\theta)\Omega$ , où  $A$  est un autre domaine strictement convexe et borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $c = (\lambda_1(A)/\lambda_1(\Omega))^{1/2}$ . Soit  $\mathcal{S}$  la sphère unitaire dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $S \ni x \rightarrow n(x) \in \mathcal{S}$  est l'application de Gauss. Désignons par  $\nu$  celle de  $\partial A$  sur  $\mathcal{S}$ . Alors, l'application  $x \rightarrow (1-\theta)x + \theta c \nu^{-1}n(x)$  est un difféomorphisme de  $S$  sur  $\partial(\theta cA + (1-\theta)\Omega)$ . D'après (6), nous avons

$$\frac{d}{d\theta} \lambda_1(\theta cA + (1-\theta)\Omega) \Big|_{\theta=0} = \int_S \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)^2 \langle -x + c \nu^{-1}n(x), n(x) \rangle dS,$$

où  $U$  est comme toujours la première fonction propre positive et normalisée pour  $\Omega$ . Nous exprimons le membre à droite par une intégrale sur  $\mathcal{S}$ . Posons  $u_\Omega(y) = (\frac{\partial U}{\partial n}(x))^2 / K(x)$ ,  $\varphi_\Omega(y) = -\langle x, y \rangle$  avec  $y = n(x)$  et  $\varphi_A(y) = -\langle \nu^{-1}(y), y \rangle$ , où  $K(x)$  est la courbure de Gauss de  $S$  en  $x$  ( Remarquons que  $d\mathcal{S}/K = dS$  ). Par notre choix particulier de  $c$ , le membre à gauche de l'égalité ci-dessus est non-positif grâce à la convexité, d'où nous avons

$$\sqrt{\lambda_1(A)} \int_{\mathcal{S}} \varphi_A u_\Omega d\mathcal{S} \geq \sqrt{\lambda_1(\Omega)} \int_{\mathcal{S}} \varphi_\Omega u_\Omega d\mathcal{S} \quad (11)$$

( Notons que le membre à droite est égal à  $2 \lambda_1(\Omega)^{3/2}$ , parce que

$$2\lambda_1(\Omega) = - \int_S \langle x, n(x) \rangle \left( \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right)^2 dS .$$

Voir p.571 de [5]).

L'inégalité (11) est vraie pour tous les  $\Omega$  et  $A$  strictement convexes et bornés. Prenons en particulier  $A=R\Omega$ , où  $R$  est un élément quelconque du groupe orthogonal  $O(n)$ . Alors,

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi_{\Omega}(Ry) u_{\Omega}(y) d\mathcal{S} \geq \int_{\mathcal{S}} \varphi_{\Omega}(y) u_{\Omega}(y) d\mathcal{S} \text{ pour tout } R \in O(n).$$

Pour être plus compréhensible, soit  $n=2$ . Alors,  $y \in \mathcal{S}$  est exprimé par un angle  $t \in [0, 2\pi)$  et les  $\varphi_{\Omega}$  et  $u_{\Omega}$  s'identifient avec des fonctions périodiques de période  $2\pi$ . Donc, l'inégalité ci-dessus s'écrit encore

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{\Omega}(s \pm t) u_{\Omega}(t) dt \geq \int_0^{2\pi} \varphi_{\Omega}(t) u_{\Omega}(t) dt \text{ pour tout } 0 \leq s < 2\pi.$$

### Références

- [1] G. Faber, Sitz. bayer. Akad. Wiss., 1923, P.169-172.
- [2] E. Krahn, Math. Ann., 94, 1924, p.97-100.
- [3] G. Pólya - G. Szegő, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Ann. Math. Studies N°27, Princeton, 1951.
- [4] P. Garabedian - M. Schiffer, J. Analyse Math., 2, 1952-53, p.281-369.
- [5] P. Garabedian, Partial Differential Equations, John Wiley & Sons, 1964.
- [6] L. Payne, SIAM Review, 9-3, 1967, p.453-488.
- [7] J. Serrin, Arch. Rat. Mech. Anal., 43, 1971, 304-318.
- [8] H. Brascamp - E. Lieb, J. Funct. Anal., 22, 1976, p.366-389.
- [9] G. Talenti, Ann. Scuo. Norm. Sup. Pisa, 1978, p.141-162.
- [10] R. Osserman, Bull. AMS., 84, 1978, p.1182-1238.
- [11] S. Gallot, Séminaire N. Bourbaki, Exposé N°569, 1980/1981.

- [12] J. Simon, Variation par rapport au domaine dans des problèmes aux limites, à paraître dans Numerical Funct. Anal., 1981.
- [13] N. Shimakura, Stabilité locale de la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet, à paraître dans C.R. Ac. Sc. Paris, 1981.

SHIMAKURA Norio

Centre de Mathématiques, de l'Ecole Polytechnique,  
91128 Palaiseau cedex;

et

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences,  
Université de Kyôto, 606 Sakyô-ku, Kyôto, Japon.