R. COIFMAN
A. MCINTOSCH
YVES MEYER

Estimations L^2 pour les noyaux singuliers

Journées Équations aux dérivées partielles (1981), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A18_0>

ESTIMATIONS L^2 POUR LES NOYAUX SINGULIERS

par

R. R. COIFMAN, A. McINTOSH et Y. MEYER

Commençons par rappeler quelques définitions.

Soient $\Delta \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ la diagonale (définie par $y = x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$) et $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ le complémentaire de Δ.

Désignons par $K : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction possédant les deux propriétés suivantes :

(1) $$|K(x,y)| \leqslant \frac{C}{|x-y|^n}$$

(2) K est localement lipschitzienne sur Ω et l'on a

$$|\nabla_x K(x,y)| \leqslant \frac{C}{|x-y|^{n+1}} \quad \text{et} \quad |\nabla_y K(x,y)| \leqslant \frac{C}{|x-y|^{n+1}} .$$

A l'aide d'un tel noyau $K(x,y)$ on définit, pour tout $\varepsilon > 0$, l'opérateur tronqué T_ε par

(3) $$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y-x| \geqslant \varepsilon} K(x,y) f(y) dy .$$

Le problème fondamental de la théorie est alors de décider si T_ε envoie $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même et si la norme, notée $\|T_\varepsilon\|_{op}$, de l'opérateur $T_\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est bornée uniformément par rapport à $\varepsilon > 0$.

Lorsque, c'est le cas, nous dirons que $K(x,y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund.

Si $K(x,y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund, il existe un opérateur continu $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout x n'appartenant pas au support de f on ait

(4) $$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy .$$

Naturellement T n'est pas unique et un choix possible de T est la limite faible d'une sous-suite T_{ε_j} , $\varepsilon_j \to 0$.

On définit également l'opérateur maximal T_* par

(5) $$T_*f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f(x)| .$$

Avec ces notations, on a le théorème suivant (A. P. Calderón, M. Cotlar et A. Zygmund).

Théorème 1 : Pour tout noyau $K(x,y)$ vérifiant (1) et (2), les deux conditions suivantes sont équivalentes

(a) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $\varepsilon > 0$, on ait $\|T_\varepsilon(f)\|_2 \leqslant C\|f\|_2$.

(b) il existe un opérateur continu $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $K(x,y)$ soit la restriction au complémentaire de la diagonale du noyau-distribution $S(x,y)$ de T.

Si l'une de ces deux conditions est satisfaite, alors l'opérateur maximal T_* se prolonge à tout $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 < p < +\infty$: $\|T_*f\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$ où C_p ne dépend que de p, n, $\|T\|_{op}$ et de la constante C figurant dans (1) et (2).

On pourra se rapporter, par exemple, à [2] , chapitre IV.

Donnons des exemples de tels noyaux $K(x,y)$ en commençant par les exemples historiques qui ont motivé la théorie .

Si $K(x,y) = A(x,x-y)$ où $A(x,u)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, vérifie les conditions

(6) $$A(x,\lambda u) = \lambda^{-n}A(x,u) \quad \text{pour tout} \quad \lambda > 0$$

(7) $$\int_{|u|=1} A(x,u)d\sigma(u) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$

(8) $$|\partial_x^\alpha \partial_u^\beta A(x,u)| \leqslant C_{\alpha,\beta} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } |u| = 1 ,$$

alors $K(x,y)$ est un noyau de Calderón-Zygmund (et certains auteurs appellent "noyaux de Calderón-Zygmund" les noyaux vérifiant (6), (7) et (8)).

L'opérateur T associé est alors défini par

(9) $$Tf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|y-x|\geqslant\varepsilon} K(x,y)f(y)dy$$

et, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ l'intégrale singulière (9) existe presque partout.

Un second exemple est celui des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre O. C'est à dire que l'on part d'un symbole $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant les conditions de Hörmander

(10) $$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

et l'on définit $T = \sigma(x,D)$ par le formalisme usuel

(11) $$\sigma(x,D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\,\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi\ .$$

Alors le noyau distribution de $\sigma(x,D)$ s'écrit $S(x,x-y)$ et la distribution $S(x,.) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vérifie les propriétés suivantes

(12) $$\sigma(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.u}\,S(x,u)du \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

et plus généralement $|\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)| \leqslant C_\beta$ si $\beta \in \mathbb{N}^n$. D'autre part

(13) $$S(x,u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

et satisfait aux inégalités $|\partial_x^\alpha\,\partial_u^\beta S(x,u)| \leqslant C_{\alpha,\beta}\,|u|^{-n-|\beta|}$ si $0 < |u| \leqslant 1$ tandis que $|\partial_x^\alpha\,\partial_u^\beta S(x,u)| \leqslant C_N|u|^{-N}$ pour tout $N \geqslant 1$ si $|u| \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}^n$.

Les inégalités vérifiées par le noyau distribution sont bien plus précises que (1) et (2) et pour montrer que $\sigma(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, on écrit, grâce à une partition C^∞ de l'identité, $S(x,u) = S_1(x,u) + S_2(x,u)$ où S_1 a les mêmes propriétés que S mais est, de plus nulle si $|u| \geqslant 1$ et où S_2 est nulle si $|u| \leqslant 1/2$. Alors $|S_2(x,x-y)| \leqslant \dfrac{C}{1+|x-y|^{n+1}}$ et l'action de l'opérateur correspondant est triviale.

En ce qui concerne S_1, on est ramené à prouver une estimation locale. On définit, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $F(v,x) = \int_{\mathbb{R}^n} S(v,x-y)f(y)dy$. Alors on a

$$\|F(v,x)\|_{L^2(dx)} \leqslant \|\sigma\|_\infty\,\|f\|_2$$

et, plus généralement

$$\|\partial_v^\beta F(v,x)\|_{L^2(dx)} \leqslant \|\partial_x^\beta\sigma\|_\infty\,\|f\|_2$$

pour $0 \leqslant |\beta| \leqslant m$.

Puisque $m > \frac{n}{2}$, le théorème de trace de Sobolev s'applique et permet de restreindre $F(v,x)$ à la diagonale $v = x$ et d'obtenir une fonction $F(x,x)$ dans L^2_{loc} . Ceci termine la démonstration de la continuité de $\sigma(x,D) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

L'exemple suivant est de nature tout à fait différente. On désigne par $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne : il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que, pour tout couple (x,y) de deux nombres réels on ait

$$|A(x) - A(y)| \leqslant C|x-y| \tag{14}$$

Le noyau que l'on considère est $K(x,y) = \dfrac{A(x) - A(y)}{(x-y)^2}$ et A. P. Calderón a démontré en 1965 [1] que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, l'intégrale singulière v.p $\int K(x,y)f(y)dy = g(x)$ existe presque partout et que $\|g\|_2 \leqslant C\|A'\|_\infty \|f\|_2$ où C est une constante absolue. L'opérateur T défini par $T(f) = g$ peut être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel. Son symbole est alors, en posant $a(x) = A'(x)$, donné par la formule $\sigma(x,\xi) = \int e^{i\alpha x} \dfrac{|\xi+\alpha| - |\xi|}{\alpha} \hat{a}(\alpha)d\alpha$ et n'appartient pas à $L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Or aucune des classes existantes d'opérateurs pseudo-différentiels ne permet de donner des estimations $L^2(\mathbb{R})$ pour des symboles non bornés.

L'opérateur de Calderón se situe donc "au delà des opérateurs pseudo-différentiels". En 1974 puis en 1976 deux des auteurs [2] généralisaient le théorème de Calderón aux noyaux $\dfrac{(A(x) - A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}$ où $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est lipschitzienne et $k \in \mathbb{N}$.

En 1977, A. P. Calderón démontrait [1] qu'en appelant L_k l'opérateur défini par le noyau ci-dessus, on a $\|L_k\|_{op} \leqslant C^k \|A'\|_\infty^k$ où $C \geqslant 1$ est une constante absolue dont la valeur n'était pas connue.

En présentant ses résultats au congrès international d'Helsinki, A. P. Calderón pose le problème de montrer que $\|L_k\|_{op} \leqslant C_\varepsilon (1+\varepsilon)^k \|A'\|_\infty^k$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Nous allons maintenant donner une réponse positive à cette conjecture et, ce faisait, établir une liste de nouveaux noyaux de Calderón-Zygmund, c'est-à-dire de noyaux décrits par le théorème I.

<u>Théorème II</u> : <u>Soient K une partie compacte et convexe du plan complexe, U un ouvert contenant K et $F : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U.</u>
<u>Désignons par $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on ait $\dfrac{A(x) - A(y)}{x - y} \in K$. Alors le noyau $N(x,y) = F\left(\dfrac{A(x) - A(y)}{x - y}\right) \dfrac{1}{x - y}$ définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$.</u>

En employant la méthode de transférence de R. Coifman et G. Weiss, on peut donner à ce résultat une forme plus abstraite.

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace muni d'une tribu et d'une mesure σ-finie $\mu \geq 0$ sur $\mathcal{T}$. Désignons par U_t un groupe d'automorphismes de $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ indexé par $\mathbb{R}$, préservant la mesure μ et tel que si $E \in \mathcal{T}$ et $\mu(E) < +\infty$, la mesure de la différence symétrique entre $U_t(E)$ et E tende vers 0 avec t.

Nous dirons qu'une fonction $A : \Omega \to \mathbb{C}$ est lipschitzienne relativement à U_t s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\left\| \frac{A(U_s(x)) - A(x)}{s} \right\|_{L^\infty(dx)} \leq C.$$

<u>Soient, de nouveau,</u> K <u>une partie compacte et convexe du plan complexe,</u> U <u>un ouvert contenant</u> K <u>et</u> $F : U \to \mathbb{C}$ <u>une fonction holomorphe dans</u> U. <u>Soit</u> $A : \Omega \to \mathbb{C}$ <u>une fonction lipschitzienne telle que, pour tout</u> $s \in \mathbb{R}$, <u>on ait</u>

$$\frac{A(U_s(x)) - A(x)}{s} \in K .$$

<u>Alors l'opérateur</u> T <u>défini par</u>

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{A(U_t(x)) - A(x)}{t}\right) f(U_t x) \frac{dt}{t}$$

<u>est borné sur</u> $L^2(\Omega, \mathcal{T}, d\mu)$.

Un cas particulier du théorème II a une signification géométrique si particulière qu'il convient de le regarder comme un énoncé indépendant.

On désigne par $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne ($|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M|x-y|$ pour tout x réel et tout y réel) et par $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y = \varphi(x)\}$ le graphe de la fonction φ. Soient Ω_1 et Ω_2 les ouverts limités par Γ et définis par $y < \varphi(x)$ et $y > \varphi(x)$. Suivant C. Kenig [4] on leur associe deux espaces de Hardy généralisés $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$ définis comme suit : $F \in H^2(\Omega_1)$ signifie que $F : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ est holomorphe et que

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+i\varphi(x) - i\varepsilon|^2 dx < +\infty$$

et de même pour $H^2(\Omega_2)$. Naturellement si $\varphi = 0$, on retrouve les espaces de Hardy usuels.

On peut définir [4] un opérateur de trace $\theta_1 : H^2(\Omega_1) \to L^2(\Gamma)$ grâce auquel $H^2(\Omega_1)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé, noté $H^2(\Omega_1)|_\Gamma$ de $L^2(\Gamma)$ et l'on définit, de même, le sous-espace vectoriel fermé

$$H^2(\Omega_2)|_\Gamma \subset L^2(\Gamma) = L^2(\Gamma, ds) \qquad \text{où} \qquad ds = \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\, dx \ .$$

Théorème III : L'espace $L^2(\Gamma)$ est la somme directe des deux sous-espaces fermés $H^2(\Omega_1)|_\Gamma$ et $H^2(\Omega_2)|_\Gamma$.

La somme directe n'est orthogonale que si $\varphi(x) = ax + b$. Cet énoncé avait été obtenu par A. P. Calderón en 1977 [1] sous l'hypothèse restrictive $\|\varphi'\|_\infty \leqslant \delta$ ($\delta > 0$ venant de la méthode de perturbation employée). Notre contribution fut donc de nous affranchir de δ . En outre la méthode de A. P. Calderón reposait sur des techniques de variable complexe et, en particulier, sur l'usage de la représentation conforme. Nos démonstrations constituent un retour à l'analyse réelle et il y est fait un usage important des "mesures de Carleson" et des inégalités qui s'y rattachent.

Un dernier résultat intéressant est l'extension des théorèmes précédents à $\mathbb{R}^n$. Elle est obtenue par la méthode des rotations de Calderón.

Théorème IV : Supposons que $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soient deux fonctions lipschtiziennes. C'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C|x - y|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$ (et de même pour A). Alors le noyau $K(x,y) = \dfrac{A(x) - A(y)}{\left[|x-y|^2 + (\varphi(x) - \varphi(y))^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}$ définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Très curieusement le point de départ de ce travail fut une conjecture de Kato que nous avons pu résoudre par les mêmes méthodes d'analyse réelle.

Voilà ce dont il s'agit.

En retournant à la dimension 1, on désigne par D l'opérateur $-i\dfrac{d}{dx}$ et par $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ une fonction essentiellement bornée telle que $\mathcal{Re}\, a(x) \geqslant 1$ presque-partout.

Suivant Kato [3] on peut définir la racine carrée $\sqrt{T}$ de l'opérateur accrétif $T = DM_aD$ comme un opérateur non borné dont le domaine est un sous-espace dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Plus précisément $\sqrt{T} = \frac{2}{\pi} \; T \int_0^\infty \frac{d\lambda}{T + \lambda^2 I}$. Le problème posé par Kato est de montrer que le domaine de l'opérateur $\sqrt{T}$ est l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$.

<u>Théorème V</u> : <u>Soit</u> $H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ <u>l'espace de Sobolev usuel</u>. <u>Alors</u>, <u>avec les notations précédentes</u>, $\sqrt{T} : H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ <u>est continu.</u>

Les démonstrations de ces résultats paraîtront ultérieurement.

REFERENCES

[1] A. P. Calderón : Commutators, Singular integrals on Liptschitz curves and applications, Proceedings of the International Congress of Mathematicians pp.85-96, Vol. I (1978).

[2] R. R. Coifman et Y. Meyer : Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque 57, Soc. Math. France (1978).

[3] T. Kato : Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, New York, 1966.

[4] C. Kenig : Weighted H^p spaces on Lipschitz domains. Amer. J. Math., Vol. 102, n° 1, pp. 129-163.

***