JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

S. MIZOHATA

Sur quelques équations du type Schrödinger

Journées Équations aux dérivées partielles (1981), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A11_0>

Conférence n° 11

SUR QUELQUES EQUATIONS DU TYPE SCHRÖDINGER

par S. MIZOHATA

§ 1. INTRODUCTION

Il s'agit du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles linéaires de la forme

$$\partial_t^m u(x,t) + \sum_{j=1}^{m} a_j(x,t;\partial_x)\,\partial_t^{m-j} u(x.t) = f(x,t), \tag{1}$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy pour(1), à savoir, on se donne la donnée de Cauchy

$$\partial_t^i u(x,o) = u_i(x) \quad , \quad (0 \leqslant i \leqslant m-1) \tag{1'}$$

Si ordre $a_j \leqslant j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, (1) est dite kowalewskienne d'après Petrowsky. L'équation kowaleswkienne qui est bien posée dans la classe C^∞ est appelée hyperbolique, et il y a beaucoup de travaux sur la caractérisation des équations hyperboliques. D'autre part, quand l'équation n'est pas kowalewskienne, si le problème de Cauchy est bien posé pour t positif et négatif dans un espace fonctionnel convenable, je dis que cette équation est du type Schrödinger.

Je voudrais souligner que, quand les coefficients dépendent de x, la caractérisation des équations du type Schrödinger devient assez délicate, et il apparaîtra des conditions de nature tout à fait différente de celles des cas hyperboliques. Comme un exemple simple, je considère :

$$L(u) = i\partial_t u + \Delta u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_{x_j} u + c(x)u = f(x,t), \tag{2}$$

dans l'espace $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$.

On suppose que les coefficients $b_j(x)$ et $c(x)$ sont bornés avec leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Le problème que nous allons considérer est le problème de Cauchy dans l'espace L^2. Donnons la définition.

Définition : Nous dirons que l'équation (2) est bien posé dans l'espace L^2 si $\forall u_o(x) \in L^2$, $\forall f(.,t) \in C_t^o(L^2)$, il existe une et une seule solution $u(.,t) \in C_t^o(L^2)$, telle que $u(x,0) = u_o(x)$, et d'ailleurs on a l'inégalité,

$$(3) \qquad \|u(.,t)\| \leqslant C(T)[\|u_o(x)\| + |\int_o^t \|f(.,s)\|\, ds|] ,$$

pour tout $|t| \leqslant T$.

J. Takeuchi a proposé une condition suffisante [2]. Mais sa démonstration me semble-t-il, n'est pas claire. Je vais montrer que la condition de Takeuchi est une condition nécessaire , et ensuite je me propose une condition suffisante.

La condition de Takeuchi peut s'énoncer comme il suit :

(C_o) $\quad \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \int_o^t b_j(x + \omega s)\omega_j \, ds$ est resté borné, quand (x,ω,t) parcourt $\mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$.

Pour la démonstration de la nécessité, nous utilisons une solution approximative -paquet d'ondes- indiquée par G. D. Birkhoff [1].

§ 2. NECESSITE DE (C_o)

Posons $u = e^{i\varphi}v$.

$$e^{-i\varphi}L(e^{i\varphi}v) = - [\partial_t\varphi + \sum_i (\partial x_i\varphi)^2]\, v + iT_\varphi .v + M(v) ,$$

où

$$(4) \qquad \begin{cases} T_\varphi = \partial_t + 2 \sum_j \partial x_j\varphi\, \partial x_j + \sum_j b_j(x)\, \partial x_j\varphi , \\ M = \Delta + \sum b_j(x)\, \partial x_j + C(x) . \end{cases}$$

On prend comme φ (fonction de phase)

$$(5) \qquad \varphi = \xi x - |\xi|^2 t , \quad \xi \in \mathbb{R}^n ,$$

et comme v une solution de $T_\varphi v = 0$:

$$(6) \qquad v(x,t;\xi) = \exp[- \int_o^t \sum_j b_j(x - 2\,\xi\, s)\xi_j \, ds\,]\, \psi(x - 2\xi t).$$

Maintenant on va montrer que l'inégalité (3) ne subsiste plus, si la condition (C_o) est violée. Dans ce cas, on voit que :

$$-\mathrm{Re} \int_o^t \sum b_j(x - 2\omega s)\,\omega_j ds$$

n'est pas borné supérieurement, lorsque (x,ω,t) parcourt $\mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^1_+$. Alors il existe (x^1,ω^o,t_o), $(t_o > 0)$ tel que

$$(7) \qquad -\mathrm{Re}\int_o^{t_o} \sum_j b_j(x^1 - 2\omega^o s)\omega_j^o ds \geq \log(2C(T)).$$

où $C(T)$ est la constante dans (3).

Désignons

$$x^o = x^1 - 2\omega^o t_o,$$

et prenons dans l'expression (6) ,

$$(8) \qquad \xi = \rho\omega^o \ , \ t_\rho = t_o/\rho \ ,$$

ρ étant le paramètre tendant vers $+\infty$. Alors

$$(9) \qquad v_\rho(x,t) \equiv v(x,t;\rho\omega^o) = \exp[-\int_o^{\rho t} \sum b_j(x - 2\omega^o s)\omega_j^o\, ds]\ \psi(x - 2\rho\omega^o t) \ .$$

Ceci implique que

$$v_\rho(x,t_\rho) \equiv v(x,t_o/\rho \ ; \ \rho\omega^o) = v(x,t_o;\omega^o),$$

qui montre que $v_\rho(x,t_\rho)$ est indépendante de ρ comme fonction de x .

Maintenant on choisit $\psi(x) \in C_o^\infty$, $\int\psi^2 dx = 1$, de support assez petit, concentré autour du point x^o. Alors compte tenu de (7), on peut supposer que

$$(10) \qquad \| v_\rho(.,t_\rho)\| \geq \frac{3}{2}\, C(T)\ \| \psi(x)\| .$$

Or $$L(e^{i\varphi}v\ ) = -\ e^{i\varphi}M(v_\rho) = e^{i\varphi}f_\rho \ ,$$

et l'expression (9) montre que $\| f_\rho(.,s)\|$ est resté borné pour $s \in [0,t_\rho]$ quand ρ tend vers $+\infty$. Ceci implique

$$\int_o^{t_\rho} \| f_\rho(.,s)\|\ ds$$

tend vers 0 lorsque ρ tend vers ∞ , car $t_\rho = t_o/\rho$. Ce qui montre que l'inégalité (3) ne subsiste plus compte tenu de (10).

§ 3. SUFFISANCE

L'idée fondamentale est de réduire l'équation $L(u) = f$ à une équation de Schrödinger usuelle. Dans ce but, posons

$$u(x,t) = k(x,t,D)v(x,t),$$

où $k(x,t,D)$ est un opérateur pseudo-différentiel usuel.

On définit le symbole de k par

$$\begin{cases} (\partial_t + 2 \sum\limits_j \xi_j x_j + \sum b_j(x)\xi_j)k(x,t;\xi) = 0 \\ k(x,0;\xi) = 1 . \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$(11) \qquad \begin{cases} k(x,t;\xi) = e^{\varphi(x,t;\xi)} \\ \varphi(x,t;\ \xi) = - \displaystyle\int_0^t \sum_j b_j(x - 2\xi s)\xi_j \, ds \end{cases}$$

$L(u) = f$ devient

$$\begin{cases} k(i\partial_t + \Delta)v + k_1(x,t;D)v = f \\ k_1(x,t;\xi) = (\Delta + \sum b_j \partial x_j + c(x))k(x,t;\xi) . \end{cases}$$

Maintenant, on pose, en dehors de (C_o), la condition suivante :

$$(C_\alpha) \qquad \forall\ |\alpha| \geqslant 1, \quad \int_0^\infty |\partial_x^\alpha b_j(x + \omega s)|ds \ \text{ est resté borné ,}$$
$$\text{lorsque } (x,\omega) \text{ parcourt } \mathbb{R}^n \times S^{n-1} , \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Sous ces conditions, on voit facilement que

i) $\forall(\alpha,\beta) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta k(x,t;\xi)| \leqslant M_{\alpha\beta}$

ii) $\forall\alpha \quad |\partial_\xi^\alpha k(x,t;\xi)| \leqslant M_\alpha t^{|\alpha|}$.

On applique le théorème de Calderon-Vaillancourt. On voit que k, k_1 sont des opérateurs bornés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, de plus $\underline{k(x,t;D)}$ est invertible comme élément de $\mathcal{L}(L^2;L^2)$ si $|t|$ est assez petit. Alors, l'équation se réduit à

$$(i\partial_t + \Delta + k^{-1}k_1)v = k^{-1}f \ ,$$

qui démontre la suffisance .

D'où le

Théorème : Pour que l'équation (2) soit bien posée dans l'espace L^2, la condition (C_o) est nécessaire. Si l'on ajoute la condition (C_α) à la condition (C_o), le problème est bien posé dans l'espace L^2.

Pour montrer l'inversibilité de k, il suffit de considérer l'opérateur pseudo-différentiel, noté $e^{-\varphi}$, qui correspond au symbole $e^{-\varphi(x,t;\xi)}$. On voit que

$$e^{-\varphi} \circ k = I + r(x,t;D),$$

$$k \circ e^{-\varphi} = I + r'(x,t;D)$$

où $\|r\|$, $\|r'\|$ se majorent par const. $|t|$.

REFERENCES

[1] G. D. Birkhoff : Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1939), 681-700.

[2] J. Takeuchi : On the Cauchy problem for some non kowlewskian equations with distinct characteristic roots, J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), 105-124.

[3] S. Mizohata : On some Schrödinger type equations, Proc. Japan Acad. Sci. (1981)

[4] S. Mizohata : Sur quelques équations du type Schrödinger, à paraître au Séminaire de Vaillant (1981).

*
* *