Journées Équations aux dérivées partielles

Serge Alinhac

Opérateurs elliptiques et problème de Cauchy

Journées Équations aux dérivées partielles (1981), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A7_0>

Conférence n° 7

OPERATEURS ELLIPTIQUES ET PROBLEME DE CAUCHY

par S. ALINHAC

INTRODUCTION

Nous présentons ici un résultat de non unicité du problème de Cauchy pour un opérateur de type principal (complexe), en présence d'une caractéristique complexe convenable. Les résultats concernant les opérateurs non elliptiques ont fait l'objet d'une conférence à l'Ecole Polytechnique [2], et sont détaillés dans un article à paraître [1].

I. L'unicité du problème de Cauchy : les théorèmes de Calderon et de Hörmander (rappel)

. Dans toute la suite, nous supposerons les coordonnées $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ choisies en sorte que la surface initiale S est $\{t = 0\}$.

Soit $P(x,t,D_x,D_t)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients C^∞ (complexes) dans un voisinage V de l'origine, de symbole principal p. Nous considérons l'unicité du problème de Cauchy local (près de zéro), c'est à dire la propriété :

$$(u \in C^\infty(V) \;,\; Pu = 0 \;\text{ dans }\; V \text{ et } \;\operatorname{Supp} u \cap V \subset \{t \geq 0\} \cap V) \Rightarrow (u \equiv 0 \text{ près de } 0)$$

Nous supposons S non caractéristique pour P à l'origine.

. Le théorème de Calderon [3] implique l'unicité de Cauchy pour P si la condition suivante est vérifiée :

(C) l'équation (en τ) $p(x,t,\xi,\tau) = 0$

ne possède, pour (x,t) près de 0 et $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, que des racines non réelles, simples ou doubles de multiplicité constante.

Autrement dit, p est, localement en (x,t,ξ), un produit de termes $(\tau - \lambda_j(x,t,\xi))^{k_j}$ ($\lambda_j \notin \mathbb{R}$, $k_j = 1$ ou 2), avec des λ_j différents partout.

Cette condition ne retient donc de la surface initiale S que sa normale à l'origine, et est laissée intacte par des "convexifications" de S dans les deux sens.

. L'approche de Hörmander [4] au contraire prend en compte la forme de S et le côté où est supportée la solution considérée. Notons $y = (x,t)$; la surface Σ orientée d'équation $\varphi(y) = \varphi(0)$ est dite "fortement pseudo-convexe" par rapport à P (supposé elliptique ici pour simplifier) si

(PC) $$\sum \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i \partial y_j} \; p'_{\eta_i}(y,\zeta)\,\overline{p'_{\eta_j}(y,\zeta)} + \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{Im}\, p'_y(y,\zeta)\,\overline{p'_\eta(y,\zeta)} > 0$$

pour tout $y \in \Sigma$, $\zeta = \eta + i\sigma\nabla\,\varphi(y)$ $(\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\sigma \neq 0)$, vérifiant $p(y,\zeta) = \{p,\varphi\}(y,\zeta) = 0$.

Le théorème est : Σ "fortement pseudo-convexe", $Pu = 0$ et $u = 0$ pour $\varphi(y) \geqslant \varphi(0)$, impliquent $u \equiv 0$ près de 0.

Il est connu que la condition (PC) est liée à la sous-ellipticité de l'opérateur $P(y,D_y + iD_s\nabla\varphi(y))$. associé à P (cf. Trèves [7]).

II. Le theorème de non-unicité

Ce théorème considère le cas où il existe suffisamment de caractéristiques complexes doubles de P, de multiplicité variable (pour exclure l'application du théorème de Calderon), et sur lesquelles la condition de Hörmander est violée.

Théorème : Soit P un opérateur de symbole principal $p(x,t,\xi,\tau)$.

Supposons qu'il existe $\xi^o \in \mathbb{R}^n\setminus 0$, $\tau^o \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,\tau^o < 0$, tels que, en notant $m_o = (0,0,\xi^o,\tau^o)$, on ait :

i) $p(m_o) = p'_\tau(m_o) = 0$, $p''_{\tau\tau}(m_o) \neq 0$.

ii) les vecteurs $\mathrm{Re}(p'_\xi(m_o))$ et $\mathrm{Im}(p'_\xi(m_o))$ sont indépendants.

iii) $\ddot{t} \neq 0$, où le point (.) indique la dérivation le long de la bicaractéristique (complexe) de p (complexifié), issue de m_o.

iv) la variété de codimension 2, $\Sigma = \{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n$, $\exists\, \tau \in \mathbb{C}$, $p(x,0,\xi,\tau) = p'_\tau(x,0,\xi,\tau) = 0\}$ est involutive, près de $(0,\xi^o)$.

Il existe alors des fonctions C^∞ a et u, nulles pour $t \leqslant 0$ près de 0, telles que $Pu + au = 0$.

De plus, $\mathrm{supp}\; u = \{t \geqslant 0\}$, localement ∎

Remarquons tout d'abord que l'énoncé du théorème est géométrique, et ne dépend que de P et de la surface initiale S.

a) Les conditions i) et ii) impliquent qu'en fait il existe une caractéristique double $(x,0,\xi,\tau) \in \Sigma$ au dessus de chaque point $(x,0)$ voisin de l'origine : au vu du théorème de Calderon, c'est une condition nécessaire pour avoir $\mathrm{supp}\; u = \{t \geqslant 0\}$.

La condition iv) se rattache à la condition de Hörmander. Celle-ci s'écrit en effet, avec $\varphi \equiv t$,

$$\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{Im}\; p'_x(y,\zeta)\;\overline{p'_\xi(y,\zeta)} > 0 ,$$

tandis que iv) $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\; p'_x(m)\;\overline{p'_\xi(m)} = 0$ sur Σ , comme on le vérifie facilement.

Enfin, la condition iii) exprime que l'ordre de contact de la bicaractéristique (tangente) issue de m_o avec la surface initiale est exactement deux.

b) Dans certains cas, on peut affiner un peu les hypothèses. D'abord, on peut remplacer iv) par la condition plus faible :

iv)' Σ contient une variété lagrangienne réelle, étalée au-dessus de $\mathbb{R}^n_x$, passant par (o,ξ^o)

Cela permet d'envisager la réduction du cas "fortement pseudo-concave" au cas limite du théorème : le support de la solution u obtenue serait alors un convexe contenu dans $\{t \geqslant 0\}$. Néanmoins, on ne sait pas opérer une telle réduction dans le cas général. La raison profonde en est peut-être la suivante : s'il existe une solution u dont le support est "plus petit" que $\{t \geqslant 0\}$ (mais $0 \in \mathrm{Supp}\ u$), le bord de Supp u n'a aucune raison d'être régulier, et les techniques utilisées ici ne permettent pas de construire une telle solution.

Tous les contre-exemples publiés jusqu'ici (Pliš [6] , Hörmander [5]) supposent P à coefficients constants en x : iv) est alors automatiquement vérifiée, et ii) peut être affaiblie en

ii)' Σ est une variété de codimension 1 ou 2, étalée au-dessus de $\mathbb{R}^n_x$.

Soit par exemple l'opérateur de Pliš ([6], th. 1)

$$P = (D_t^2 + D_1^2 + D_2^2)^2 + t(D_1^2 + D_2^2)^2 - \frac{1}{2} D_1^4 \quad :$$

on prend $m_o = (0,0,0,0,1,-i)$, et $\Sigma = \{(x,\xi),\ \xi_1 = 0\}$, en sorte que i), ii)' et iv) sont vérifiées. Les équations de la bicaractéristique de p sont

$$\dot{x}_1 = p'_{\xi_1}\ ,\quad \dot{x}_2 = p'_{\xi_2},\quad \dot{t} = p'_\tau\ ,\quad \dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = 0\ ,\quad \dot{\tau} = -(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2\ ,\ \text{et}\ \ddot{t} = -8$$

en m_o, d'où iii) ,

III. <u>Quelques indications sur la preuve du théorème</u>

. Elle consiste à construire une famille de fonctions $u_\delta(x,t)$ $(\delta > 0)$, telles que $Pu_\delta/u_\delta = O(\delta^\infty)$ (lorsque $\delta \to 0_+$).

Ces fonctions doivent posséder en outre deux propriétés :

i) les surfaces de niveau de $|u_\delta|$ (δ fixé) sont essentiellement parallèles à t = Cte.

ii) Pour δ fixé, $|u_\delta|$ présente, comme fonction de t, un "profil en bosse", avec un maximum pour $t = \delta$.

On opère alors le réglage suivant : on choisit une suite $\delta_k = k^{\rho}$ $(\rho > 0)$ de valeurs telles que les fonctions correspondantes $u_k \equiv u_{\delta_k}$ échangent leurs importances respectives sensiblement au milieu de l'intervalle $[\delta_{k+1}, \delta_k]$:

$|\frac{u_k}{k+1}|$ est très petit en δ_{k+1}, et très grand en δ_k. On prend alors $u = \sum_{k \geqslant k_o} \tilde{u}_k$, où $\tilde{u}_k$ désigne la fonction u_k, convenablement tronquée à zéro au voisinage de δ_{k+1} et δ_{k-1} (là où elle est négligeable devant u_{k+1} et u_{k-1} respectivement). Quelques modifications mineures sur les u_k permettent en fait d'assurer que $\frac{Pu}{u} = -a$ est une fonction C^∞, plate sur $t = 0$.

. Les fonctions u_δ sont obtenues par la méthode de l'optique géométrique, pour des phases complexes convenables (cette approche a été suggérée par Hörmander [5]) :

$$u_\delta = e^{-\gamma(\delta,x)}\, e^{i\sigma\,\xi(\delta,x) + i\sigma\tau(x)(t-\delta)}\, e^{\nu\,\varphi(s,x)}\, w(\delta,s,x) ,$$

où l'on a posé $t - \delta = s\,\delta^2$, $\sigma = \nu/\delta^3$, $\nu = \delta^{-\varepsilon/\rho}$ $(\varepsilon > 0)$.

La fonction ξ est réelle; la fonction positive γ est calculée en fonction de $\mathrm{Im}\,\tau(x)$ et $\mathrm{Re}\,\varphi$ pour rendre possible le réglage des tailles de $|u_k|$ et $|u_{k+1}|$ évoqué ci-dessus. C'est la fonction φ qui est responsable de la "bosse" en $s = 0$: on peut en effet obtenir

$\mathrm{Re}\,\varphi = \alpha(x)s - \beta(s,x)s^2$, avec $\beta(0,0)$ positif arbitraire,
grâce à l'hypothèse iii) du théorèeme.

Le sens des hypothèses i), ii), iv) est ici le suivant : elles impliquent l'existence, sur Σ, d'un feuilletage de dimension 2 ; toutes les constructions des phases $\xi(\delta,x)$, $\tau(x)$ et φ utilisant des intégrations le long de ce feuilletage.

<u>REFERENCES</u>

[1] S. Alinhac : Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal, à paraître.

[2] S. Alinhac : Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal, Séminaire Goulaouic-Schwartz, exposé n° XVI, Ecole Polytechnique, 1981.

[3] A. P. Calderon : Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations. Proc. Symp. Fluid Dynamics and Appl. Math. (Univ. of Maryland 1961), Gordon and Breach, New York (1962), 147-195.

[4] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer Verlag (1963).

[5] L. Hörmander : Non uniqueness for the Cauchy problem, Lecture Notes in Math. Springer Verlag, n° 459 (1975), 36-72.

[6] A. Pliš : A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 599-617.

[7] F. Treves : Introduction to pseudo differential and Fourier integral operators, Plenum, New York 1981.

***