

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MICHEL LANGLAIS

Équations d'évolution dégénérées

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A16_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EQUATIONS D'EVOLUTION DEGENEREEES

par Michel LANGLAIS

On cherche une fonction u dépendant de trois variables réelles t, a et x ($t > 0, a > 0, x \in \Omega$), telle que :

$$u(t, a, x) \geq 0$$

et solution du problème :

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} + \mu u - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^A u(t, a, x) da \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \\ u(0, a, x) = u_0(a, x), \\ u(t, 0, x) = \int_0^A \beta(t, a, x) a(t, a, u) da, \\ \int_0^A u(t, a, u) da \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; \end{cases}$$

où μ et β sont deux coefficients positifs ou nuls et u_0 une condition initiale positive ou nulle.

On peut remarquer que si en (t_0, x_0) on a :

$$\int_0^A u(t_0, a, x_0) da = 0$$

alors la positivité de u assure :

$$u(t_0, a, x_0) = 0 \quad \forall a \in]0, A[,$$

et (*) devient une équation hyperbolique du premier ordre. Ce caractère parabolique hyperbolique de (*) entraîne un phénomène de propagation à vitesse finie du support de u_0 .

D'autre part (*) modélise un problème de dynamique de population et u représente une densité de population en fonction de l'âge a et de la position géographique x . Il existe une valeur A de $a - A$ finie - telle que :

$$(1) \quad u(t, A, x) = 0 \quad t > 0, x \in \Omega,$$

ce qui est équivalent à supposer que pour μ ne dépendant que de a :

$$(2) \quad \int_0^A \mu(a) da = +\infty.$$

Notons :

$$\begin{cases} P(t, x) = \int_0^A u(t, a, x) da, \\ P_0(x) = \int_0^A u_0(a, x) da; \end{cases}$$

si l'on intègre (*) sur l'intervalle $]0, A[$ par rapport à la variable a on obtient -sous la condition (1) -

$$(U) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[P \frac{\partial P}{\partial x} \right] = \int_0^A (\beta - \mu) u da, \\ P(0, x) = P_0(x) \\ P \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

On considère finalement le problème :

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} + \mu u - \frac{\partial}{\partial x} \left[P \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \\ u(0, a, x) = u_0(a, x), \\ u(t, 0, x) = \int_0^A \beta u da \\ P \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

Il est clair que pour résoudre (*) il suffit de trouver un couple (u, P) solution de (U), (P) et de vérifier que :

$$\int_0^A u(t, a, x) da = P(t, x).$$

Le problème (P) est un problème du type "diffusion dans les milieux poreux". Si l'on suppose que :

$$0 \leq m_0 \leq p_0(x) \leq M_0 < +\infty,$$

la résolution de (\mathcal{P}) dépend du fait que $m_0 > 0$ (cas non dégénéré) où $m_0 = 0$ (cas dégénéré). Si $m_0 > 0$ on a $P(t,x) \geq m_1 > 0$ alors que si $m_0 = 0$, $P(t,x) \geq 0$ et le support de p_0 - et donc de u_0 - se propage à vitesse finie.

Pour la résolution de $(*)$ voir [5]; pour les propriétés de "diffusion dans les milieux poreux" voir [6], [1],[4], [2]. et leurs bibliographies.

-
- [1] D. G. Aronson, Regularity of flows through porous media. SIAM, J. Appl. Math. 17 (1969).
 - [2] I. Diaz-Diaz, Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems. Nonlinear analysis, vol.3, n°6, pp.831-847.
 - [3] M. E. Gurtin, R. C. Mac Camy, On the diffusion of biological population Math. Biosc. 33 35-49, 1977.
 - [4] B. Knerr, The porous medium equation in one dimension. Transactions of A.M.S., vol. 234, n°2, 1977.
 - [5] M. Langlais, à paraître.
 - [6] O. A. Oleinik, A. S. Kalasnikov, Yui Lin, The Cauchy problem and boundary value problem for equations of the type of non stationary filtration. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 22, 1958, 667-704.

*
* *
*