

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

TA TSIEN LI

## **Comportements limites des solutions de certains problèmes mixtes pour des équations paraboliques et leurs applications**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1980), p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1980\\_\\_\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980___A13_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENTS LIMITES DES SOLUTIONS DE CERTAINS PROBLEMES  
MIXTES POUR DES EQUATIONS PARABOLIQUES ET LEURS APPLICATIONS.

par Li Ta-tsien

C'est un travail en collaboration avec A. Damlamian. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , contenant l'origine et de frontière régulière  $\Gamma$ . Pour  $n = 2$  et  $3$ , le problème

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = v(t) \delta(x) & \text{dans } Q = \Omega \times ]0, T[, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times ]0, T[, \\ y(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

admet une unique solution faible  $y = y(t; v) \in L^2(Q)$  pour tout  $v$  de  $L^2(0, T)$ , où  $\delta(x)$  désigne la masse de Dirac à l'origine et  $A$  est un opérateur fortement elliptique du deuxième ordre de forme divergentielle et à coefficients lipschitziens en  $x$ .

Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, on désigne par  $B_\varepsilon$  un domaine étoilé par rapport à l'origine, dont les petit et grand diamètres restent dans un rapport borné et sont d'ordre  $\varepsilon$ . On note  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon$ ,  $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$  et on considère le problème approché suivant

$$(I)_\varepsilon \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} + Ay_\varepsilon = 0 & \text{dans } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times ]0, T[, \\ y_\varepsilon = C_\varepsilon(t) & \text{(fonction inconnue de } t \text{ seul) sur } \Gamma_\varepsilon \text{ et} \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_A} d\sigma = v(t) & \text{pour presque tout } t \text{ de } ]0, T[, \\ y_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_\varepsilon(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \end{array} \right.$$

où  $\frac{\partial}{\partial \nu_A}$  désigne la dérivée conormale associée à  $A$ .

Théorème 1 (cf. [1]) : Pour  $n = 2$  et  $3$ , si  $v_\varepsilon$  converge faiblement (resp. fortement) vers  $v$  dans  $L^2(0,T)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, alors  $y_\varepsilon = y_\varepsilon(t;v_\varepsilon)$ , solution de  $(I)_\varepsilon$  associé à  $v_\varepsilon(t)$  (prolongée par zéro ou par  $C_\varepsilon(t)$  dans  $B_\varepsilon \times ]0,T[$ ) tend faiblement (resp. fortement) dans  $L^2(\Omega)$  vers la solution  $y$  de  $(I)$ .

En introduisant l'espace fonctionnel (cf. [2], [3])

$$\mathcal{U} = \{v \mid v(t) \in L^2(0,T), y(T;v) \in L^2(\Omega)\}$$

muni de la norme du graphe, où  $y(T;v)$  est définie par  $(I)$ , on définit la fonction coût

$$J(v) = N \int_0^T v^2(t) dt + \int_\Omega |y(T;v) - z_d|^2 dx \quad \forall v \in \mathcal{U},$$

où  $z_d$  est donné dans  $L^2(\Omega)$  et  $N$  est un réel positif donné. Alors, il existe un élément  $u_0 = u_0(t) \in \mathcal{U}$  et un seul tel que

$$J(u_0) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v).$$

De la même façon, à partir du problème  $(I)_\varepsilon$  on peut définir la fonction coût

$$J_\varepsilon(v) = N \int_0^T v^2(t) dt + \int_{\Omega_\varepsilon} |y_\varepsilon(T;v) - z_d|^2 dx \quad \forall v \in L^2(0,T)$$

et il existe un élément  $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t) \in L^2(0,T)$  et un seul tel que

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v \in L^2(0,T)} J_\varepsilon(v).$$

Théorème 2 (cf. [4]) : Pour  $n = 2$  et  $3$ , on a

- (i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) = J(u_0)$  ;
- (ii)  $u_\varepsilon(t) \rightarrow u_0(t)$  faiblement dans  $L^2(0,T)$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### Références

- [1] Alain Damlamian et Li Ta-tsien, à paraître dans C. R. A. S., 290, série A, 1980.
- [2] J. L. Lions, C. R. A. S., 289, série A, 1979, p.315 et cours au Collège de France, 1979.
- [3] Li Ta-tsien, C. R. A. S., 289, série A, 1979, p.689.
- [4] Li Ta-tsien, à paraître.