

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

D. SCHILTZ

JEAN VAILLANT

CLAUDE WAGSCHAL

**Problème de Cauchy ramifié : racine caractéristique triple en involution**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1980), p. 1-4

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1980\\_\\_\\_\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A12_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PROBLEME DE CAUCHY RAMIFIE :  
RACINE CARACTERISTIQUE TRIPLE EN INVOLUTION

par D. SCHILTZ, J. VAILLANT et C. WAGSCHAL

On considère au voisinage de l'origine de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , de coordonnées  $x = (x^0, x^1, \dots, x^n)$ , un opérateur différentiel linéaire holomorphe d'ordre  $m$  :

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

où  $D^\alpha = D_0^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $D_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ , de symbole principal

$$g(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

où  $\xi_\alpha = \xi_0^{\alpha_0} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ ,  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ .

On suppose l'hyperplan  $S : x^0 = 0$  non caractéristique, et on considère le problème de Cauchy ramifié :

$$(1) \quad \begin{cases} a(x, D)u(x) = 0 \\ D_0^h u(x) \Big|_{x^0=0} = w_h(x'), \quad 0 \leq h < m \end{cases}$$

où  $x' = (x^1, \dots, x^n)$  et les fonctions  $w_h$  sont ramifiées autour de la sous-variété  $T : x^0 = x^1 = 0$  dans  $S$ , c'est-à-dire holomorphe sur le revêtement universel de  $\Omega \setminus T$ ,  $\Omega$  étant un voisinage ouvert connexe de l'origine dans  $S$ .

On note  $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  ; on pose  $\eta' = (1, 0, \dots, 0)$ , et on suppose

$$g(x, \xi) = \prod_{i=1}^m (\xi_0 - \lambda^i(x, \xi'))$$

où les fonctions  $\lambda^i$  sont holomorphes au voisinage du point  $x = 0$ ,  $\xi' = \eta'$ . On suppose de plus :

- i)  $\lambda^1(0, \eta') = \lambda^2(0, \eta') = \lambda^3(0, \eta')$
- ii) Les nombres  $\lambda^3(0, \eta'), \dots, \lambda^m(0, \eta')$  sont deux à deux distincts

$$\text{iii) } \{ \xi_0 - \lambda^i(x, \xi'), \xi_0 - \lambda^j(x, \xi') \} = D_0 \lambda^j - D_0 \lambda^i + \\ + \sum_{k=1}^n (D_k \lambda^i D_{\xi_k} \lambda^j - D_k \lambda^j D_{\xi_k} \lambda^i) \equiv 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq j \leq 3.$$

On note  $k^i(x)$  la fonction holomorphe au voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ , solution du problème de Cauchy du premier ordre

$$\begin{cases} D_0 k^i(x) = \lambda^i(x, D' k^i(x)) \\ k^i(0, x') = x^i \end{cases}$$

où  $D' = (D_1, \dots, D_n)$ , et  $\varphi^2(x, \tau_2)$ ,  $\varphi^1(x, \tau)$ , où  $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{C}^2$ , les fonctions holomorphes solutions des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} D_0 \varphi^2(x, \tau_2) = \lambda^2(x, D' \varphi^2(x, \tau_2)) \\ \varphi^2(x, x^0) = k^3(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_0 \varphi^1(x, \tau) = \lambda^1(x, D' \varphi^1(x, \tau)) \\ \varphi^1(x, x^0 - \tau_2, \tau_2) = \varphi^2(x, \tau_2). \end{cases}$$

On a les relations :

$$\varphi^2(x, 0) = k^2(x); \varphi^1(x, x^0, 0) = k^2(x); \varphi^1(x, 0, x^0) = k^3(x); \varphi^1(x, 0, 0) = k^1(x).$$

Donnons-nous un point  $y \in \Omega - T$  : d'après le théorème de Cauchy-Kowalewska, le problème de Cauchy (1) admet une unique solution holomorphe au voisinage de  $y$ . Par des méthodes analogues à celles de Ludwig-Granoff [4] et Hamada-Leray-Wagschal [1], on démontre le

Théorème 1 : Il existe un nombre  $\omega > 0$ , un voisinage ouvert simplement connexe  $\mathcal{O}$  (resp.  $\mathcal{C}$ ) de l'origine dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  (resp.  $\mathbb{C}^2$ ), et pour  $|y^1| < \omega$ ,  $(y, 0) \in \mathcal{O} \times \mathcal{C}$  des fonctions  $u^1(t, x, \tau)$ ,  $u^2(t, x, \tau_2)$ ,  $u^i(t, x)$ ,  $3 \leq i \leq m$ , holomorphes au voisinage du point  $(t, x, \tau) = (y^1, y, 0)$  et se prolongeant analytiquement à  $\mathcal{D}_\omega \times \mathcal{O} \times \mathcal{C}_\omega$  désignant le revêtement universel du disque pointé  $\mathcal{D}_\omega = \{t \in \mathbb{C}; 0 < |t| < \omega\}$ , tels que la fonction

$$u(x) = \int_0^{x^0} d\tau_2 \int_0^{x^0 - \tau_2} D_t^2 u^1(\varphi^1(x, \tau), x, \tau) d\tau_1 + \int_0^{x^0} D_t u^2(\varphi^2(x, \tau_2), x, \tau_2, x, \tau_2) d\tau_2 + \\ + \sum_{i=3}^m u^i(k^i(x), x)$$

[ soit la solution du problème de Cauchy (1) .

Remarque : Le théorème 1 généralise des résultats précédents de Nakamura [5] , [6], Hamada-Nakamura [2] concernant des singularités polaires.

Il est clair que la fonction  $u^i(k^i(x), x)$  se ramifie autour de l'hypersurface  $K_i$  d'équation  $k^i(x) = 0$ . Les autres singularités de la fonction  $u(x)$  proviennent des termes intégraux : leur étude suit la méthode de Leray [3] .

Hypothèse 1 :  $\varphi^1(x, \tau) = \psi(x, \tau) \pi(x, \tau)$  où  $\psi$  est holomorphe, ne s'annulant pas dans  $\mathcal{O} \times \mathcal{C}$ , et  $\pi$  est holomorphe en  $x$ , polynomiale en  $(\tau_1, \tau_2)$ .

Hypothèse 2 :  $\pi(0, 0, \sigma) \neq 0$ ;  $\pi(0, \sigma, 0) \neq 0$ ;  $\pi(0, \sigma, -\sigma) \neq 0$ . On pose

$$P(x, \tau_1', \tau_2', \tau_3') = (\tau_3')^p \pi(x, \frac{\tau_1'}{\tau_3'}, \frac{\tau_2'}{\tau_3'}) \text{ où } p = d^0 \pi .$$

On note  $d$  la droite d'équation  $\xi_1 \tau_1 + \xi_2 \tau_2 + \xi_3 = 0$  ( $\xi_3 \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$ ) : un point de cette droite a pour coordonnées homogènes  $(\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2, \xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3, \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)$  : on le notera  $\xi \wedge \eta$  .

On note  $A$  l'anneau des polynômes homogènes en  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  à coefficients dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en  $O$ . On considère la restriction de  $P$  à  $\mathcal{O} \times d$  :

$$\tilde{P}(x, \xi, \eta) = P(x, \xi \wedge \eta) .$$

Soit  $\tilde{P}'$  le produit des facteurs irréductibles de  $\tilde{P}(x, \xi, \eta)$  dans  $A[\eta]$ .  $\tilde{P}'$  ne dépend en fait que de  $(x, \xi \wedge \eta)$  (cf. Leray [3] p.328) ; on pose :

$$P'(x, \xi \wedge \eta) = \tilde{P}'(x, \xi \wedge \eta) .$$

Le discriminant en  $\rho \in \mathbb{C}$  de  $P'(x, \xi \wedge \eta + \rho \xi \wedge \zeta)$  est de la forme :  $Q(x, \xi) P'(x, \xi \wedge \zeta)^K$  .

Hypothèse 3 :  $Q(0, 1, 0, -\sigma) \neq 0$  .

$Q(x, \xi)$  se décompose de façon unique dans  $A$  : soit  $Q'(x, \xi)$  le produit de ses facteurs irréductibles. Le discriminant en  $\rho \in \mathbb{C}$  de  $Q'(x, \xi + \rho \zeta)$  n'est pas fonction de  $\rho$  et est polynomial en  $(\xi, \zeta)$  : soit  $R(x)$  le pgcd de ses coefficients.

Théorème 2 : Il existe un voisinage  $\mathcal{O}'$  de 0 dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  tel que  $u(x)$  se prolonge analytiquement au revêtement universel du complémentaire dans  $\mathcal{O}'$  de l'ensemble

$$\Sigma : \prod_{i=1}^m k^i(x) Q(x,1,0,0) Q(x,0,1,0) Q(x,1,1,-x^0) R(x) = 0 .$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples; problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle. J. Math. pures et appl., 55 (1976), p.297 à 352.
- [2] Y. Hamada, G. Nakamura : On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non uniform multiple characteristics. Ann. Sc. Normale Sup. Pisa, Classe di Scienze, série IV, 4 (1977), p.725 à 755.
- [3] J. Leray : Un complément au théorème de M. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique. Bull. Soc. Math. France, 95 (1967), p.313 à 374.
- [4] D. Ludwig, B. Granoff : Propagation of singularities along characteristics with non uniform multiplicity. J. Math. Anal. Appl., 21 (1968), p.556 à 574.
- [5] G. Nakamura : The singularities of solutions of the Cauchy problems for systems whose characteristic roots are non uniform multiple. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 13 (1977), p.255 à 275.
- [6] G. Nakamura : The singular Cauchy problem for systems whose characteristic roots are non uniform multiple. Proc. Jap. Acad., 53 (1977), p.135 à 138.
- [7] D. Schiltz, J. Vaillant : Systèmes fortement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287 (1978), série A, p.133 à 136.
- [8] D. Schiltz, J. Vaillant et C. Wagschal : C. R. Acad. Sc. Paris, à paraître.