

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MASAKI KASHIWARA

Construction du noyau de Bergman local

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A10_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION DU NOYAU DE BERGMAN LOCAL

par M. KASHIWARA

Soient Ω un ouvert pseudo-convexe relativement compact de \mathbb{C}^n et $\bar{\Omega}$ son conjugué complexe $\{z \in \mathbb{C}^n ; \bar{z} \in \Omega\}$. On note par $L_h^2(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes carré intégrales sur Ω . Le noyau de Bergman est une fonction holomorphe $B(z, \zeta)$ définie sur $\Omega \times \bar{\Omega}$ qui satisfait les conditions suivantes :

$$(1) \quad \text{Pour tout } z \in \Omega, B(z, \cdot) \in L_h^2(\bar{\Omega})$$

$$(2) \quad \text{Pour tout } u(z) \in L_h^2(\Omega), \text{ on a}$$

$$u(z) = \int_{\Omega} B(z, \bar{w}) u(w) dw d\bar{w}$$

où $dw d\bar{w}$ est une mesure euclidienne de \mathbb{C}^n .

Pour regarder le comportement de $B(z, \zeta)$ au bord de Ω , nous allons introduire la notion du noyau de Bergman local. Soit z_0 un point au bord de Ω et supposons les conditions suivantes.

- (a) $\partial\Omega$ est réel analytique et strictement pseudo-convex au voisinage de z_0 .
 (b) L'adhérence $[\Omega]$ de Ω admet un système de voisinages ouverts pseudo-convexes.

Soit $f(z, \zeta)$ une fonction holomorphe définie sur $U_0 \times \bar{U}_0$ pour un voisinage U_0 assez petit de z_0 telle que $f(z, \bar{z})$ soit à valeur réelle, $df(z_0, \bar{z}_0) \neq 0$ et que $\Omega \cap U_0 = \{z \in U_0 ; f(z, \bar{z}) < 0\}$.

Théorème 1 : Soit $K(z, \zeta)$ une fonction holomorphe définie sur $\{(z, \zeta) \in U \times \bar{U} ; \text{Re } f(z, \zeta) < 0\}$ pour un voisinage U de z_0 qui satisfait la condition suivante :

(NL 1) Il existe un voisinage W de z_0 contenu dans $U \cap U_0$ et deux fonctions holomorphes $a(z, \zeta)$ et $b(z, \zeta)$ définies sur $W \times \bar{W}$ tels que $K(z, \zeta) = a(z, \zeta) f(z, \zeta)^{-1-n} + b(z, \zeta) \log f(z, \zeta)$ sur $\{(z, \zeta) \in W \times \bar{W} ; \text{Re } f(z, \zeta) < 0\}$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(NL 2) Il existe deux voisinages V et V' de z_0 contenus dans W tels que, pour toute $u \in L_h^2(\Omega \cap V)$, la fonction $u(z) - \int_{\Omega \cap V} K(z, \bar{w}) u(w) dw d\bar{w}$ se prolonge à une fonction holomorphe définie sur V' .

(NL 3) Pour tout voisinage V de z_0 contenu dans W , il existe un voisinage V' de z_0 tel que pour toute $u \in L_h^2(\Omega \cap V)$,

$$u(z) - \int_{\Omega \cap V} K(z, \bar{w}) u(w) dw d\bar{w}$$

soit holomorphe sur V' .

(NL 4) $B(z, \zeta) - K(z, \zeta)$ est holomorphe au voisinage de (z_0, \bar{z}_0) .

Définition : Si $K(z, \zeta)$ satisfait les conditions (NL 1) - (NL 4), on dit que K est un noyau de Bergman local.

Par le théorème 1, le comportement du noyau de Bergman au point z_0 est déterminé localement par Ω .

Nous allons construire le noyau de Bergman local. Il existe un n -vecteur $A(z, w, \zeta)$ des fonctions holomorphes $(A_j(z, w, \zeta))_{j=1, \dots, n}$ tel que

$$f(z, \zeta) - f(w, \zeta) = \sum_{j=1}^n (z_j - w_j) A_j(z, w, \zeta)$$

nous définissons $J(z, w, \zeta)$ par le déterminant du matrice carré de longueur $(1+n)$

$$\begin{bmatrix} 0 & d_\zeta f(w, \zeta) \\ A(z, w, \zeta) & d_\zeta A(z, w, \zeta) \end{bmatrix}.$$

Soient v_1, \dots, v_n des champs de vecteurs qui ne contiennent que $\partial/\partial\zeta_1, \dots, \partial/\partial\zeta_n$ et qui engendrent des v telles que $v(f(w, \zeta)) \equiv 0$ modulo $f(w, \zeta)$. Par exemple, si $\partial f/\partial\zeta_1 \neq 0$, on peut prendre comme v_1, \dots, v_n des champs de vecteurs

$$f(w, \zeta) \partial/\partial\zeta_1, \partial f/\partial\zeta_j(w, \zeta) \partial/\partial\zeta_1 - \partial f/\partial\zeta_1(w, \zeta) \partial/\partial\zeta_j \text{ pour } j = 2, \dots, n.$$

Théorème 2 : Il existe une fonction $K(z, \zeta)$ en z et ζ telle que

$$K(z, \zeta) = J(z, w, \zeta) f(z, \zeta)^{-1-n} + \sum_{j=1}^n v_j^* G_j(z, w, \zeta)$$

où $G_j(z, w, \zeta)$ est une fonction multiforme qui s'écrit de la forme

$$G_j(z, w, \zeta) = a_j(z, w, \zeta) f(z, \zeta)^{-n-2} + b_j(z, w, \zeta) \log f(z, \zeta) \text{ pour des fonctions}$$

$a_j(z, w, \zeta)$ et $b_j(z, w, \zeta)$ holomorphes au voisinage de (z_0, z_0, \bar{z}_0) . v_j^* est l'adjoint de v_j .

Théorème 3 : La fonction $K(z, \zeta)$ donnée dans le théorème précédent est un noyau de Bergman local (à une constante absolue près).

Pour démontrer le théorème 3 on utilise le changement des variables d'intégration et l'intégration par partie et on le ramène au théorème suivant.

Théorème 4 : Soient z_0 et z_1 deux points de \mathbb{C}^n et $\overline{z_0 z_1}$ l'intervalle aux extrémités z_0 et z_1 . Soient U un voisinage de z_0 et γ une chaîne de dimension $(2n-1)$ dans $\{(w, \zeta); \langle w - z_0, \zeta \rangle \neq 0, w \in U\}$ telle que le bord $\partial\gamma$ soit disjoint à $\{(w, \zeta); \langle z_1, z_0, \zeta \rangle / \langle w - z_0, \zeta \rangle \geq 1\}$. Supposons en plus que la projection de γ sur le w -espace coupe une fois $\overline{z_0 z_1}$. Alors, il existe un voisinage V de $\overline{z_0 z_1}$ tel que, pour toute fonction holomorphe $u(z)$ sur U ,

$$u(z) - c_n \int_{\gamma} \frac{u(w)}{\langle z-w, \zeta \rangle^n} dw \omega(\zeta)$$

soit holomorphe sur V . Ici, $\omega(\zeta) = \zeta_1 d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_n - \zeta_2 d\zeta_1 \wedge d\zeta_3 \wedge \dots \wedge d\zeta_n + \dots$
 $+ (-1)^{n-1} \zeta_n d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_{n-1}$ et c_n est une constante absolue.

*
*
*