

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LAMBERTO CATTABRIGA

Quelques résultats sur la résolubilité analytique des équations linéaires à coefficients constants

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979___A18_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES RESULTATS SUR LA RESOLUBILITE ANALYTIQUE
DES EQUATIONS LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

par L. CATTABRIGA

L'existence d'une solution analytique réelle dans \mathbb{R}^n de l'équation $P(D)u = f$, avec f analytique réelle dans \mathbb{R}^n et $P(D)$ un polynôme différentiel à coefficients constants, est apparemment liée à la possibilité de construire des solutions élémentaires pour $P(D)$ qui soient analytiques dans certaines régions (voir [1], [3], [5]). L'existence de telles solutions élémentaires est garantie lorsque certaines conditions sur les zéros du polynôme $P(\zeta)$ sont satisfaites. Ici nous donnons des conditions qui sont plus faibles que celles qui, en [3] ont permis d'établir l'existence d'une solution élémentaire appartenant à un dual d'un espace de Gevrey et qui en plus est analytique dans un demi-espace. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème : Soit $P(D) = \sum_{j=0}^m a_j(D')D_n^j$, $D' = (D_1, \dots, D_{n-1})$, un opérateur différentiel linéaire dans \mathbb{R}^n à coefficients constants, avec $a_m(D') \neq 0$.

Soit $A = \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}; \sum_{j=0}^m |a_j(\xi')| = 0\}$ et $H = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$. Supposons qu'il existe $\rho > 1$ et deux constantes positives c_1, c_2 telles que si

$$(\xi', \tau) \in (\mathbb{R}^{n-1} \setminus A) \times \mathbb{C}, |\xi'| > k, P(\xi', \tau) = 0, \text{ alors}$$

(C)

$$\text{ou bien } \text{Im } \tau \geq -c_1 |\xi'|^{1/\rho}, \text{ ou bien } \text{Im } \tau \leq -c_2 (|\xi'| + |\text{Re } \tau|).$$

Nous choisirons, ce qui est toujours possible, k, c_1, c_2 telles que :

$$2^{-1} c_2 k > c_1 k^{1/\rho} + 1,$$

$$k > (4c_1)^{\rho/(\rho-1)}, c_2 < 2.$$

Dans ces conditions il existe une solution élémentaire E pour $P(D)$ telle que :

- i) $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \gamma_0^{(\rho)'})'(\mathbb{R}^{n-1})$;
- ii) $\text{sing supp } E \subset H$;
- iii) il existe deux constantes $c > 0$ et $a \geq -1$ telles que pour tout $x \in \mathcal{C}H$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$|D^\alpha E(x)| \leq v c^{|\alpha|+1} |\alpha|! |x_n|^{-(n+a)-m-|\alpha|} ,$$

où v est le plus grand nombre des racines distinctes de l'équation en τ $P(\xi', \tau) = 0$, satisfaisant la seconde inégalité dans l'hypothèse (C) et $\gamma_0^{(\rho)'}$ désigne le dual de l'espace de Gevrey $\gamma_0^{(\rho)}$;

- iv) $\text{supp } E \subset \mathcal{C}H$ si toutes les racines de l'équation $P(\xi', \tau) = 0$ satisfaisant la seconde inégalité dans (C).

La démonstration de ce théorème est obtenue suivant la même méthode utilisée en [3] où $A \subset \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}; |\xi'| \leq k\}$, en adaptant à la présente situation le raisonnement développé par A. Enqvist [4].

A l'aide des résultats obtenus, on peut prouver les théorèmes d'existence d'une solution analytique pour l'équation $P(D)u = f$, donnée en [2] sous des conditions plus faibles pour l'opérateur $P(D)$.

-
- [1] K. G. Andersson : Global solvability of partial differential equations in the space of real analytic functions, Coll. on Analysis, Rio de Janeiro 1972.
- [2] L. Cattabriga : Fundamental solutions with singular support contained in a cone or in a half space. Applications. Conferenze Sem. Mat. di Bari , 151 (1978).
- [3] L. Cattabriga, E. De Giorgi : Soluzioni di equazioni differenziali a coefficienti costanti appartenenti in un semispazio a certe classi di Gevrey, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 12 (1975).
- [4] A. Enqvist : On tempered fundamental solutions supported by a convex cone, Ark. Mat. 14 (1976).
- [5] T. Kawai : On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations (I). J. Math. Soc. Japan, 24 (1972).