

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD HELFFER

JEAN NOURRIGAT

Hypoellipticité pour des opérateurs quasi-homogènes à coefficients polynomiaux

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979___A10_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HYPOELLIPTICITE POUR DES OPERATEURS
QUASI-HOMOGENES A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX

par B. HELFFER et J. NOURRIGAT

Soit \mathfrak{G} une algèbre de Lie admettant une décomposition en somme directe de sous-espaces \mathfrak{G}_i ($i = 1, \dots, r$) ($r \in \mathbb{N}$) tels que :

$$(1) \quad \begin{aligned} [\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] &\subset \mathfrak{G}_{i+j} && \text{si } i+j \leq r \\ [\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] &= 0 && \text{si } i+j > r \end{aligned}$$

\mathfrak{G} est muni d'une famille de dilatations δ_t ($t > 0$) définie par :

$$(2) \quad \delta_t \left(\sum_{i=1}^r x_i \right) = \sum_{i=1}^r t^i x_i \quad \text{si } x_i \in \mathfrak{G}_i .$$

On désigne, pour tout x dans \mathfrak{G} , par (adx) l'application linéaire de \mathfrak{G} dans \mathfrak{G}

$$(3) \quad y \rightarrow (\text{adx})y = [x, y]$$

\mathfrak{G}^* désignera le dual de \mathfrak{G} et δ_t^* la transposée de l'application δ_t . Pour tout ξ dans \mathfrak{G}^* et x dans \mathfrak{G} , on définit $(\text{adx})^*\xi$ par :

$$(4) \quad \langle (\text{adx})^*\xi, y \rangle = \langle \xi, (\text{ad}-x)y \rangle \quad \forall y \in \mathfrak{G}$$

On note $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$ l'algèbre enveloppante complexifiée, $\mathcal{U}_m(\mathfrak{G})$ le sous-espace des éléments P de $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$ homogènes de degré m pour δ_t et on pose

$$\mathcal{U}^m(\mathfrak{G}) = \sum_{j=0}^m \mathcal{U}_j(\mathfrak{G}) .$$

Soit G le groupe connexe, simplement connexe associé à \mathfrak{G} par l'application exponentielle. Le groupe G agit dans \mathfrak{G}^* par :

$$(5) \quad \forall x \in \mathfrak{G} \quad , \quad (\exp x) \cdot \xi = \exp(\text{adx})^* \cdot \xi .$$

On appelle orbite de ξ et on note $O(\xi)$ ou $G.\xi$ l'ensemble des points de \mathcal{G}^* de la forme $\exp(\text{adx})\xi$ avec x dans \mathcal{G} .

On désigne par \mathcal{G}^*/G l'espace des orbites muni de la topologie quotient de \mathcal{G}^* (muni de sa topologie usuelle). Soit \hat{G} l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles. Kirillov [6] a montré comment on pouvait définir une application β_0 de \mathcal{G}^* dans \hat{G} par sa fameuse méthode des orbites. Par passage au quotient, β_0 définit une application de \mathcal{G}^*/G dans \hat{G} qui est un homéomorphisme (Th. de D. Brown [1]). On pose la définition suivante :

Définition : On appelle fermé conique G -stable dans \mathcal{G}^* un sous-ensemble F de \mathcal{G}^* tel que :

- (6) F est une réunion d'orbites
- (7) F est stable par les dilatations δ_t^* de \mathcal{G}^*
- (8) F est fermé dans \mathcal{G}^* .

On appellera cône fermé dans G un élément de la forme $\beta_0(F)$ avec F vérifiant (6), (7), (8).

L'objet de cet exposé est d'étudier dans le cas des algèbres de Lie nilpotentes de rang 3, la forme "microlocale" suivante de la conjecture de Rockland :

Conjecture : Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie vérifiant (1) et (2) et \hat{F} un cône fermé dans \hat{G} . Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ (m multiple assez grand de $r!$) tel que :

- (9) Pour toute représentation π dans \hat{F} non triviale, $\pi(P)$ est injectif dans l'espace \mathcal{S}_π des vecteurs C^∞ de π .

Alors, si $(A_j)_{j \in J}$ désigne une base de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, il existe une constante C strictement positive telle que l'on ait, pour tout π dans \hat{F} et tout u dans

\mathcal{S}_π :

$$(10) \quad \sum_j \|\pi(A_j)u\|_{\mathcal{K}_\pi}^2 \leq C \|\pi(P)u\|_{\mathcal{K}_\pi}^2$$

où \mathcal{K}_π est l'espace de la représentation.

Remarque : Cette conjecture est démontrée dans les deux cas suivants :

a) $\hat{F} = \hat{G}$ (cf. [2]).

On déduit alors de (10) que P est hypoelliptique dans G.

b) Le rang de nilpotence de \mathfrak{G} est inférieur ou égal à 3

c) Dans le cas du rang 1, c'est simplement une version microlocalisée dans des cônes, des estimations pour les opérateurs elliptiques homogènes.

Application aux opérateurs quasi-homogènes à coefficients polynomiaux

Soit \mathcal{K} une sous-algèbre graduée de \mathfrak{G} , et H le sous-groupe connexe, simplement connexe associé à \mathcal{K} . On veut étudier le problème de l'hypoellipticité maximale pour des éléments P de $\mathcal{U}_m(\mathfrak{G})$ opérant sur des distributions invariantes par H (à gauche) $\mathcal{D}'(H \backslash G)$. On note alors $\pi_{(0, \mathcal{K})}(P)$ l'opérateur défini sur $\mathcal{D}'(H \backslash G)$. On dira que $\pi_{(0, \mathcal{K})}(P)$ est hypoelliptique maximal, si pour tout Q dans $\mathcal{U}^m(\mathfrak{G})$, il existe une constante C_Q , telle que pour tout u dans $C_0^\infty(H \backslash G)$, on ait :

$$(11) \quad \|\pi_{(0, \mathcal{K})}(Q)u\|_{L^2(H \backslash G)}^2 \leq C_Q (\|\pi_{(0, \mathcal{K})}(P)u\|_{L^2(H \backslash G)}^2 + \|u\|^2) .$$

De telles inégalités impliquent l'hypoellipticité de $\pi_{(0, \mathcal{K})}(P)$.

Spectres

Soit \mathcal{K}^\perp l'ensemble des éléments ξ dans \mathfrak{G}^* qui s'annulent sur \mathcal{K} .

On pose :

$$\tilde{\Omega}_{(0, \mathcal{K})} = \widetilde{G \cdot \mathcal{K}^\perp} \quad \text{où } \widetilde{G \cdot \mathcal{K}^\perp} \text{ désigne l'adhérence de Zariski de } G \cdot \mathcal{K}^\perp$$

$$\bar{\Omega}_{(0, \mathcal{K})} = \overline{G \cdot \mathcal{K}^\perp} \quad \text{où } \overline{G \cdot \mathcal{K}^\perp} \text{ désigne l'adhérence usuelle de } G \cdot \mathcal{K}^\perp$$

On pose :

$$\widetilde{\text{Sp}} \pi_{(0, \mathcal{K})} = \beta_o(\tilde{\Omega}_{(0, \mathcal{K})}) \quad \text{spectre "algébrique" de } \pi_{(0, \mathcal{K})}$$

$$\text{Sp} \pi_{(0, \mathcal{K})} = \beta_o(\bar{\Omega}_{(0, \mathcal{K})}) \quad \text{spectre de } \pi_{(0, \mathcal{K})}$$

$\text{Sp} \pi_{(0, \mathcal{K})}$ est un fermé conique de \hat{G} . On a obtenu les théorèmes suivants :

Théorème 1 : Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{G})$, si $\pi_{(0, \mathcal{K})}(P)$ est hypoelliptique maximal dans $H \backslash G$, alors pour toute représentation π non triviale de $\text{Sp} \pi_{(0, \mathcal{K})}$, $\pi(P)$ est injectif dans \mathcal{I}_π .

Le théorème 1 est démontré dans [3].

Exemple (question de L. P. Rothschild) :

$$\text{Soit } X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - y_i(x_i^2 + y_i^2) \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1, 2$$

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + x_i(x_i^2 + y_i^2) \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1, 2$$

Alors $P = \sum_{i=1}^2 (X_i^2 + Y_i^2) + i[X_1, Y_1] - i[X_2, Y_2]$ n'est pas hypoelliptique maximal.

Théorème 2 : Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathbb{Q})$. Si pour toute représentation π non triviale dans $\tilde{\text{Sp}}^\pi_{(0, \mathcal{K})}$, $\pi(P)$ est injectif dans \mathcal{L}_π , alors $\pi_{(0, \mathcal{K})}(P)$ est hypoelliptique.

Ce théorème est démontré dans [4], il utilise la caractérisation de $\tilde{\text{Sp}}^\pi_{(0, \mathcal{K})}$ suivante. Soit $I_{(0, \mathcal{K})}$ l'idéal dans $\mathcal{U}(\mathbb{Q})$ des A tels que : $\pi_{(0, \mathcal{K})}(A) = 0$. Alors $\tilde{\text{Sp}}^\pi_{(0, \mathcal{K})} = \{\pi \in \hat{G}, \pi(I_{(0, \mathcal{K})}) = 0\}$. Si (A_i) désigne un système de générateurs "sympathiques" de $I_{(0, \mathcal{K})}$, on peut montrer que l'hypoellipticité de $\pi_{(0, \mathcal{K})}(P)$ se déduit de l'hypoellipticité du système (P, A_i) sur G .

Théorème 3 : Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathbb{Q})$. Si \mathbb{Q} est de rang de nilpotence au plus 3, et si m est un multiple non nul de 6. Si, pour toute représentation π non triviale dans $\text{Sp}^\pi_{(0, \mathcal{K})}$, $\pi(P)$ est injectif dans \mathcal{L}_π , alors $\pi_{(0, \mathcal{K})}(P)$ est hypoelliptique maximal dans $H \setminus G$.

Le théorème 3 est démontré dans [5]. C'est un corollaire de la conjecture (qui est démontrée dans le cas du rang 3).

[1] I. D. Brown : Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t.6, 1973, p.407-411.

[2] B. Helffer, J. Nourrigat : Comm. in P. D. E., vol. 3, n°8, 1978 et (1979).

[3] B. Helffer, J. Nourrigat : Hypoellipticité pour des opérateurs à coefficients polynomiaux quasihomogènes I

[4] B. Helffer : Hypoellipticité pour des opérateurs à coefficients polynomiaux quasihomogènes II

- [5] B. Helffer, J. Nourrigat : Hypoellipticité pour des opérateurs à coefficients polynomiaux quasihomogènes III.
- [6] A. A. Kirillov : Russian Math. Surveys 17 (1962), p.53-104.
- [7] C. Rockland : Trans. of the A. M. S., vol. 240, n^o517, p.1-52 (1978).

*
* *
*