JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LOUIS BOUTET DE MONVEL

Convergence dans le domaine complexe des séries de fonctions propres

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A3_0>

CONVERGENCE DANS LE DOMAINE COMPLEXE DES SERIES DE FONCTIONS PROPRES

par L. BOUTET DE MONVEL

Soit X une variété analytique réelle compacte de dimension n, $\tilde{X}$ un complexifié de X, $P = P(x,D)$ un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 1, elliptique, de symbole positif, sur X - par exemple $P = \sqrt{-\Delta}$ où Δ est le Laplacien d'une métrique riemannienne à coefficients analytiques. On suppose que P satisfait à la condition suivante :

(C) <u>Pour tout</u> $x \in X$, <u>l'ensemble des covecteurs</u> ξ <u>en</u> x <u>tels que</u> $\sigma(P)(\xi) \leq 1$ <u>est strictement convexe</u>.

Notons Ξ le champ hamiltonien du symbole de P, et $\Phi = \Phi(t,x,\xi)$ son flot intégral : $\Phi(t,x,\xi)$ est la valeur à l'instant t de la solution de l'équation différentielle $\frac{d}{dt}(x,\xi) = \Xi$ qui vaut (x,ξ) à l'instant $t = 0$ (si $P = \sqrt{-\Delta}$, Φ est le flot géodésique). Comme le symbole de P est analytique, et homogène en ξ, $\Phi(t,x,\xi)$ est encore bien défini pour $(x,\xi) \in T^*\tilde{X}$ assez voisin de T^*X, et $t \in \mathbb{C}$ assez petit. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, soit $\Omega_\varepsilon \subset \tilde{X}$ l'ensemble des points de base des covecteurs $\Phi(it,x,\xi)$ avec $x \in X$ (réel), ξ réel, $|\xi| = 1$, $0 \leq t < \varepsilon$. Un argument facile de perturbation (à partir du cas où P est un opérateur de convolution sur $\mathbb{R}^n$) montre que, sous l'hypothèse (C), Ω_ε est un voisinage tubulaire strictement pseudo-convexe de X, de bord $\partial\Omega_\varepsilon$ C^∞.

On sait que l'opérateur e^{itP} est un opérateur intégral de Fourier associé à la relation canonique graphe de $\Phi(t,..)$; comme P est analytique, le noyau $K(t,x,y)$ de cet opérateur est encore bien défini pour x,y complexes voisins de X, et t complexe assez petit, avec une singularité sur la projection dans $\tilde{X} \times \tilde{X}$ du graphe de Φ. Faisons en particulier $t = i\varepsilon$: l'ensemble des $z \in \tilde{X}$ tels que $K(i\varepsilon,z,y)$ soit singulier pour un $y \in X$ est précisément $\partial\Omega_\varepsilon$. Il en résulte aisément que l'opérateur $e^{-\varepsilon P}$, de noyau $K(i\varepsilon,x,y)$, est un opérateur intégral de Fourier à phase complexe ($\gg 0$ au sens de [4]), opérant de l'espace $C^\infty(X)$ vers l'espace $C^\infty(\partial\Omega_\varepsilon)$, et dont l'image est contenue dans le sous-espace $O^\infty(\partial\Omega_\varepsilon)$ des fonctions qui ont un prolongement C^∞ dans $\Omega_\varepsilon \cup \partial\Omega_\varepsilon$, holomorphe dans $\partial\Omega_\varepsilon$. C'est en fait une bijection entre ces deux espaces (l'opérateur $e^{+\varepsilon P}$ est défini au moins sur l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de $\Omega_\varepsilon \cup \partial\Omega_\varepsilon$, comme on voit en poussant dans le domaine complexe le cycle d'intégration qui définit $e^{sP}(f) = \int_X K(s,x,y)f(y)dy$. Le degré de $e^{-\varepsilon P}$ en tant qu'opérateur intégral de Fourier de $C^\infty(X)$ dans $C^\infty(\partial\Omega_\varepsilon)$ est $-\frac{n-1}{4}$ (e^{itP} est de degré 0 en tant qu'opérateur dans $C^\infty(X)$; la formule qui définit $e^{-\varepsilon P}$ est la même, mais la dimension de $\partial\Omega_\varepsilon$ est $2n-1 = \dim X + n-1$). En résumé, en notant H^s l'espace de Sobolev, et $0^s(\partial\Omega_\varepsilon)$ le sous-espace de $H^s(\partial\Omega_\varepsilon)$ des fonctions qui sont traces sur $\partial\Omega_\varepsilon$ (au sens des distributions) de fonctions holomorphes dans Ω_ε :

Théorème : Avec les notations ci-dessus, pour tout s réel et pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'opérateur $e^{-\varepsilon P}$ est une bijection linéaire continue de $H^s(X)$ sur $0^{s+\frac{n-1}{4}}(\partial\Omega_\varepsilon)$.

Supposons maintenant P autoadjoint (pour une mesure de densité analytique > 0 convenable), et soit (f_n) une base orthonormale de fonctions propres de P, (λ_n) la suite des valeurs propres correspondantes. On a $e^{-\varepsilon P} f_n = e^{-\varepsilon\lambda_n} f_n$, et le théorème implique aussitôt :

Corollaire : La série $\Sigma a_n f_n$ converge dans $L^2(\partial\Omega_\varepsilon)$ si et seulement si on a $\Sigma |e^{\varepsilon\lambda_n} |\lambda_n|^{-\frac{n-1}{4}} a_n|^2 < \infty$.

(L'inégalité exprime que la série $\Sigma e^{\varepsilon\lambda_n} a_n f_n = e^{\varepsilon P}(\Sigma a_n f_n)$ converge dans $H^{-\frac{n-1}{4}}(X)$). Ce corollaire donne une indication assez précise sur la croissance dans le domaine complexe des fonctions propres de P.

---

[1] L. Boutet de Monvel : C. R. Acad. Sc. Paris, t.287 (1978) 855-856.

[2] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand : Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö. Astérisque 34-35 (1976) 123-164.

[3] L. Boutet de Monvel : On the index of Toeplitz operators of several complex variables. Inventiones Math. 50 (1979) 249-272.

[4] A. Melin, J. Sjöstrand : Fourier integral operators with a complex phase. Lecture Notes (Springer Verlag) n° 459 (1975) 120-233.

***