JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MICHEL BONY

Calcul symbolique et singularités des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A1_0>

Conférence n^o 1

CALCUL SYMBOLIQUE ET SINGULARITES DES SOLUTIONS DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

par J. M. BONY

1. Notations et résultats

Soit $\mathcal{F}[u] = F(x,u(x),\dots,\partial^\beta u(x),\dots) = 0$ une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre m, où $F(x,u_o,\dots,u_\beta,\dots)$ est une fonction C^∞ de ses arguments. On supposera éventuellement que F est quasi-linéaire, et plus précisément qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$F(x,u,\dots) = \sum_{k_o < k \leq m} \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x,u,\dots,\partial^\beta u,\dots)_{\beta\leq p(k)} \cdot \partial^\alpha u + A_{k_o}(x,u,\dots,\partial^\beta u)_{\beta\leq k_o}$$

Dans ce cas, on note $d = \mathrm{Max}(k_o, \frac{k+p(k)}{2})$ en faisant la convention $p(k) = -\infty$ lorsque les A_α correspondants ne dépendent que de x. On a $d = m$ pour une équation non quasi-linéaire, $0 \leq d \leq m - \frac{1}{2}$ pour une équation quasi-linéaire, et $d = -\infty$ pour une équation linéaire.

Si u est une fonction réelle de classe C^ρ avec $\rho > d$, les fonctions non linéaires et les produits apparaissant dans l'expression de F sont bien définis, et $F(x,u,\dots,\quad,\dots) \in C^{\rho-d}$. Les espaces de fonctions höldériennes C^ρ sont définis de façon habituelle pour $0 < \rho < 1$, la définition s'étend aux réels non entiers de telle manière que $Pu \in C^{\rho-m}$ pour $u \in C^\rho$ et P pseudo-différentiel d'ordre m, les nombres ρ et ρ-m n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$. Dans les résultats ci-dessous, il faudra remplacer $u \in C^\rho$ par $u \in C^{\rho-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque ρ sera entier.

De même, si $u \in H^s$, l'expression $\mathcal{F}[u]$ est bien définie si on a la double condition : $s > n/2 + \mathrm{Max}(k_o, p(k))$ et $s > n/4 + d$.

Si u est une solution de $\mathcal{F}[u] = 0$, on définit l'équation caractéristique

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x,u(x),\dots,\partial^\beta u(x),\dots)(i\xi)^\alpha = 0,$$

et on définit la variété caractéristique et les bicaractéristiques de façon habituelle .

Théorème 1 : Soit u une solution de classe C^{ρ} de $\mathcal{F}[u] = 0$, $\rho > d$. Alors en tout point (x_o, ξ_o) non caractéristique, u est microlocalement de classe $C^{2\rho+m-2d}$. Si $u \in H^s$, $s > n/2 + \mathrm{Max}(k_o, p(k))$, $s > n/4 + d$, on a microlocalement $u \in H^t$ pour $t < 2s - n/2 + m - 2d$.

Théorème 2 : Soit u une solution de classe H^s, s vérifiant les conditions ci-dessus. Supposons de plus que $p_m(x,\xi)$ soit de classe C^2. Soit (x_o, ξ_o) appartenant à la variété caractéristique, tel que u appartienne microlocalement à H^r en (x_o, ξ_o), avec $r < 2s - n/2 + m - 2d - 1$. Alors u appartient à H^r le long de la bicaractéristique issue de (x_o, ξ_o).

Sous l'hypothèse $u \in H^s$, on choisit $\rho < s - n/2$, voisin de $s - n/2$. On a alors $u \in C^{\rho}$. Le gain de régularité est $\rho + m - 2d$ dans le théorème 1, quantité positive d'après les hypothèses. Le théorème 2 n'est intéressant que si $\rho + m - 2d > 1$, ce qui implique seulement $p_m(x,\xi) \in C^1$. On n'a plus alors nécessairement unicité des courbes intégrales du champ hamiltonien. Toutefois, un raffinement du théorème 2 assure qu'une singularité en (x_o, ξ_o) se prolonge le long de l'une au moins des demi-bicaractéristiques issues de (x_o, ξ_o).

Remarque : Nous avons exposé en 1978, et résumé dans [1], une démonstration des théorèmes 1 et 2, au moins dans le cas des équations quasi-linéaires du second ordre. Les méthodes que nous utilisions alors se généralisent naturellement aux équations d'ordre quelconque, mais nécessitent dans certains cas des hypothèses $\rho > \rho_o$ plus restrictives que la condition $\rho > d$ ci-dessus.

Indépendamment et simultanément, B. Lascar [5] et J. Rauch [6] ont obtenu certains cas particuliers des théorèmes 1 et 2.

2. Un nouveau calcul symbolique

Soit $a(x,\xi)$ une fonction homogène de degré m en ξ, de classe C^{∞} en ξ pour $\xi \neq 0$, à support compact en x et de classe C^{ρ} en x ($\rho > 0$ non entier). Posons

$$T_a u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \chi\left(\frac{\xi-\eta}{|\eta|}\right) \hat{a}(\xi-\eta, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta$$

où $\hat{a}$ est la transformée de Fourier de a par rapport à la première variable, et où χ est égale à 1 pour $|\xi - \eta| \leq \varepsilon_1 |\eta|$ et égale à 0 pour $|\xi - \eta| \geq \varepsilon_2 \eta$, avec $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$.

L'opérateur T_a applique C^σ dans $C^{\sigma-m}$, H^s dans H^{s-m} quels que soient σ (non entier) et s. Si χ_1 et χ_2 vérifient les conditions ci-dessus, la différence des deux opérateurs associés applique $C^\sigma(H^s)$ dans $C^{\sigma-m+\rho}(H^{s-m+\rho})$.

Dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on note Σ^m_ρ la classe des fonctions du type $a_m(x,\xi) + a_{m-1}(x,\xi) + \ldots + a_{m-[\rho]}(x,\xi)$, définies dans $\Omega \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, où a_{m-k} est homogène de degré m-k en ξ, C^∞ en ξ, $C^{\rho-k}$ en x.

On dit que A est un opérateur paradifférentiel (proprement supporté) dans Ω, d'ordre m et de classe C^ρ $[A \in Op(\Sigma^m_\rho)]$ si A est un opérateur proprement supporté, et s'il existe $a(x,\xi) \in \Sigma^m_\rho(\Omega)$ tel que, pour tout compact K de Ω, quelles que soient φ_1 et φ_2 dans $C^\infty_0(\Omega)$, égales à 1 au voisinage de K, l'opérateur $A - \varphi_2 T_{\varphi_1 a}$, restreint aux distributions à support dans K, applique C^σ (resp. H^s) dans $C^{\sigma-m+\rho}$).

L'application qui à un opérateur paradifférentiel A associe son symbole $a = \sigma(A)$ est bien définie et surjective .

<u>Proposition 4</u> : Soient $A \in Op(\Sigma^{m_1}_\rho)$ et $B \in Op(\Sigma^{m_2}_\rho)$. Alors $A.B \in Op(\Sigma^{m_1+m_2}_\rho)$ et on a

$$\sigma(AB) = \sigma(A) \# \sigma(B) = \sum_{|\alpha|+\ell+k \leq [\rho]} (1/\alpha!) \partial^\alpha_\xi a_{m_1-k} D^\alpha_x b_{m_2-\ell}$$

L'adjoint A^* appartient à $Op(\Sigma^{m_1}_\rho)$, et on a

$$\sigma(A^*) = [\sigma(A)]^* = \sum_{|\alpha|+k \leq [\rho]} (1/\alpha!) \partial^\alpha_\xi D^\alpha_x \bar{a}_{m_1-k} .$$

3. <u>Fonctions non linéaires</u>

<u>Proposition 5</u> : Soient $a \in C^\rho$ et $u \in C^\sigma$

a) si $\rho > 0$, $\sigma > 0$, on a $au = T_a . u + T_u . a + r$ avec $r \in C^{\rho+\sigma}$.

b) si $\rho > 0$, $\sigma < 0$, $\rho + \sigma > 0$, on a $au = T_a . u + r$ avec $r \in C^{\rho+\sigma}$.

<u>Théorème 6</u> : Soit $u \in C^\rho$, $\rho > 0$ et F de classe C^∞. Alors

$$F(u(x)) = T_{F'(u(x))} \cdot u(x) + r(x) \quad \text{avec } r \in C^{2\rho}$$

Plus généralement, on a :

$$F(u_1(x), \ldots, u_N(x)) = \Sigma\, T_{\partial F/\partial u_i} \cdot u_i + r \quad \text{avec } r \in C^{2\rho}$$

si $u_j \in C^\rho$.

D'après la proposition 5, on a $u^2 \equiv 2T_u \cdot u \equiv T_{2u} \cdot u \pmod{C^{2\rho}}$. Une application répétée de cette proposition et du fait que (Prop.4), $T_a \circ T_b \equiv T_{ab}$ (mod. ρ-régularisants) permet de démontrer le théorème lorsque F est un polynôme. Une estimation soigneuse des restes, et les théorèmes de Bernstein sur l'approximation des fonctions C^∞ par des polynômes permettent de conclure.

<u>Corollaire 7</u> : Soit $u \in C^\rho$, $\rho > \operatorname{Max}(k_o, p(k))$, une solution de $\mathcal{F}[u] = 0$. Soit P un opérateur paradifférentiel d'ordre m et de classe $C^{\rho+m-2d}$ de symbole

$$\sigma(P) = \underset{\beta > 2d-\rho}{} \partial F/\partial u_\beta(x, u(x), \ldots)(i\xi)^\beta .$$

a) Si $\rho > d$, on a $Pu \in C^{2\rho-2d}$

b) Si $u \in H^s$, avec $s > n/2 + \rho$ et $s > n/4 + d$, on a $Pu \in H^{s+\rho-2d}$.

Dans le cas non quasi-linéaire, on a immédiatement, pour $\rho > m$

$$\mathcal{F}[u] \equiv \Sigma\, T_{\partial F/\partial u_\beta} \cdot \partial^\beta u \equiv T_{\Sigma\, \partial F/\partial u_\beta | (i\xi)^\beta} \cdot u \pmod{C^{2\rho-2m}}.$$

Dans le cas quasilinéaire, on applique dabord la proposition 5 aux produits $A_\alpha(x, u, \ldots)\, \partial^\alpha u$, puis le théorème 6 aux termes $A_\alpha(\ldots)$.

4. <u>Démonstration du théorème 1</u>

Soit donc (x_o, ξ_o) n'appartenant pas à la variété caractéristique, et soit $k(x,D)$ un opérateur pseudo-différentiel classique, d'ordre 0, dont le symbole s'annule au voisinage de la variété caractéristique de P, et dont le symbole principal est non nul en (x_o,ξ_o).

Soit $q\in\Sigma^{-m}_{\rho+m-2d}$ tel que $k=q\# p$, et $Q\in op(\Sigma^{-m}_{\rho+m-2d})$ de symbole q. On a alors $k(x,D)\,u = QPu + Ru$ où R est $\rho+m-2d$ régularisant. On a $Q[Pu]\in C^{2\rho+m-2d}$ (ou $H^{2s-n/2+m-2d-\varepsilon}$) et Ru appartient au même espace, ce qui prouve le théorème.

§ 5. Démonstration du théorème 2

C'est une conséquence immédiate du théorème linéaire suivant.

Théorème 8 : Soit $P\in Op(\Sigma^m_\sigma)$, $\sigma>1$, dont le symbole principal p_m est réel et de classe C^2. Soit $u\in H^s$ tel que $Pu\in H^t$ au voisinage d'un arc de bicaractéristique. Pour $r\le \mathrm{Min}(t+m-1,\ s+\sigma-1)$, si u est de classe C^r en un point de l'arc de bicaractéristique, u est de classe C^r au voisinage de l'arc entier.

On peut supposer $m=1$, en multipliant P à gauche par un opérateur elliptique d'ordre $1-m$.

Soit Γ un arc de bicaractéristique joignant (x_o,ξ_o) à (x_1,ξ_1). Etant donnés ω voisinage conique de (x_o,ξ_o) et Ω voisinage conique de Γ, une première étape consiste à construire des fonctions $k_\delta(x,\xi)$, $0<\delta<\delta_o$, positives, C^∞, homogènes de degré 0 en ξ, à support dans Ω, strictement positives sur Γ, vérifiant :

$$|H_{p_1}k_\delta| = |\{p_1,k_\delta\}| \ge 1/\delta\; k_\delta \text{ hors de } \omega.$$

On notera $K_\delta = k_\delta(x,D)$. Le point-clef consiste en la démonstration d'une inégalité d'énergie, voisine de celle utilisée dans [4], de la forme suivante :
il existe une application $\delta \rightsquigarrow c(\delta)$ de $]0,\delta_o[$ dans $\mathbb{R}^+$, tendant vers 0 avec δ, une application $\delta\rightsquigarrow M(\delta)$ de $]0,\delta_o[$ dans $\mathbb{R}^+$, $\varepsilon>0$ et des semi-normes $|\cdot|_{r,\omega},\dots$ telles que l'on ait

$$(*)\ \forall u\in C^\infty_o,\ |K_\delta u|_r \le c(\delta)|K_\delta Pu|_r + M(\delta)\{|u|_{r,\omega} + |Pu|_{r-1,\Omega} + |u|_{r-\varepsilon,\Omega} + |u|_{r-\sigma+1}\}$$

où, par exemple, $|u|_{r,\omega} = |Hu|_r$ où H est un pseudo-différentiel d'ordre 0, à symbole nul hors de ω. Nous ferons trois remarques :

a) Si cette inégalité est valable pour une valeur r_o, elle est valable quel que soit r. Il suffit de l'appliquer à Eu où E est elliptique d'ordre $r - r_o$, et d'utiliser le calcul symbolique pour estimer l'action sur u des (bi)-commutateurs.

b) Si cette inégalité est valable, on a :
$u \in H^r(\omega)$, $u \in H^{r-\sigma+1}$, $u \in H^{r-\varepsilon}$, $Pu \in H^r(\Omega)$ implique $u \in H^r$ au voisinage de Γ. On l'applique en effet à $(1-\alpha\Delta)^{-1}u = u_\alpha$ et on fait tendre α vers 0, l'estimation des (bi)commutateurs montrant que le membre de droite reste borné. Le théorème 8 en résulte alors de façon évidente.

c) Il suffit en fait de démontrer l'inégalité

$$(**) \qquad |K_\delta u|_o \leq c(\delta)|K_\delta Pu|_o + M(\delta)\{|u|_{o,\omega} + |u|_{-\varepsilon}\} \; .$$

On obtiendra en effet (*) pour $r=0$ en appliquant (**) à $E_o u$, où E_o est un pseudo-différentiel d'ordre 0, à symbole nul hors de Ω et égal à 1 sur le support de K_δ.

La démonstration de (**) est alors facile. On a :

$$|\mathrm{Im}(PK_\delta u, K_\delta u)| \leq C^{te}\, |K_\delta u|_o^2$$

$$\mathrm{Im}(P\,K_\delta u, K_\delta u) = \mathrm{Im}(K_\delta Pu, K_\delta u) + \mathrm{Re}(\tfrac{1}{i}K_\delta^*[P,K_\delta]u,u)$$

$$\pm \tfrac{1}{i}K_\delta^*[P,K_\delta] = \tfrac{1}{\delta}K_\delta^*\,K_\delta + S_1 + S_2$$

avec $S_i \in \mathrm{Op}(\Sigma^o_{\sigma-1})$, le symbole principal de S_1 étant positif, le symbole de S_2 étant nul hors de ω. On en déduit :

$$1/\delta|K_\delta u|_o^2 + \mathrm{Re}(S_1 u,u) \leq C_o(|K_\delta u|_o^2 + |K_\delta Pu|_o^2 + M(|u|_{o,\omega}^2 + |u|^2_{\frac{1-\delta}{2}}) \; ,$$

avec C_o indépendante de δ, et (**) résulte alors de la forme suivante de l'inégalité de Gårding précisée.

<u>Théorème 9</u> : Soit $S \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_\tau)$, $\tau > 0$. On suppose le symbole principal $s_m(x,\xi) \geq 0$. Il existe alors $\mu > 0$ tel que

$$\mathrm{Re}(Su,u) \geq -C^{te}|u|_{m/2-\mu/2} \; .$$

En utilisant des opérateurs A^*SA, avec A elliptique d'ordre convenable, on se ramène à démontrer le théorème pour une valeur particulière de m. Nous prendrons $m = \mu$ avec $\mu = 1$ si $\tau > 2$ et $\mu < \tau/2$ sinon.

On peut montrer que $S - s_\mu(x,D)$ applique alors L^2 dans L^2, et il suffit donc de prouver que

$$\mathrm{Re}(s_\mu(x,D)u,u) \geq -C^{te}\,|u|_o^2 .$$

On conclut en adaptant la démonstration de Cordoba-Fefferman [3]. Avec leurs notations, on a $(W^{-1}s_\mu Wu,u) \geq 0$, et la différence entre $s_\mu(x,D)$ et $W^{-1}s_\mu W$ se révèle être un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole $r(x,\xi)$ vérifie (pour $\tau < 2$)

$$|\xi|^{|\alpha|}\,\|D_\xi^\alpha r(\cdot,\xi)\|_{\rho/2-\mu} \leq C_\alpha$$

la norme étant prise dans l'espace $C^{\rho/2-\mu}$. Un théorème de Coifman-Meyer [2] assure alors que $r(x,D)$ applique L^2 dans L^2, ce qui établit le résultat.

---

[1] J. M. Bony : Localisation et propagation des singularités pour les équations non linéaires. Actes Journées E.D.P. St Jean-de-Monts (1978).

[2] R. Coifman, Y. Meyer : Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque 57 (1978).

[3] A. Cordoba, C. Fefferman : Wave packets and Fourier integral operators. Comm. P. D. E. (1978).

[4] L. Hörmander : On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations. L'enseignement Math. 17 (1971) 99-163.

[5] B. Lascar : Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. C. R. Acad. Sc. Paris (1978).

[6] J. Rauch : Journ. Math. Pures Appl. (A paraître).

***