JEAN-MICHEL BONY

Propagation de singularités pour des équations hyperboliques non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1978), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A17_0>

Conférence n° 17

LOCALISATION ET PROPAGATION DES SINGULARITES POUR LES EQUATIONS NON LINEAIRES

par J. M. BONY

On se limitera, pour fixer les idées, aux équations quasi-linéaires du second ordre :

$$\text{(I)} \qquad \Sigma A_{ij}(x,u,\nabla u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = B(x,u,\nabla u)$$

ou

$$\text{(II)} \qquad \Sigma A_{ij}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma A_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = B(x,u)$$

où les fonctions A_{ij}, A_i, B sont de classe C^∞ et réelles.

Pour chaque solution u de (I) ou (II), on définit le symbole principal $p(x,\xi) = \Sigma\, A_{ij}(x,u(x),\nabla u(x))\, \xi_i\, \xi_j$, la variété caractéristique $V = \{(x,\xi) \mid p(x,\xi) = 0\}$ et les bicaractéristiques, courbes intégrales du champ hamiltonien H_p.

Pour $\alpha = k + \lambda$ ($k \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda < 1$), on note C^α l'espace des fonctions dont les dérivées d'ordre k sont holdériennes d'exposant λ. On dit que u est de classe C^α microlocalement au voisinage de (x_0,ξ_0), s'il existe un opérateur pseudo-différentiel classique K, d'ordre 0, dont le symbole principal est non nul en (x_0,ξ_0), tel que $Ku \in C^\alpha$. On utilise des notations analogues pour les espaces de Sobolev H^s.

<u>Théorème 1</u> : Soit u une solution de I (resp. II) de classe $C^{2+\alpha}$ ($\alpha > 0$, α et 2α non entiers). Alors u est microlocalement de classe $C^{3+2\alpha}$ [resp. $C^{4+2\alpha}$] en dehors de V.

Soit u une solution de I (resp. II) de classe $H^{n/2+2+\alpha}$ ($\alpha > 0$). Alors u est microlocalement de classe $H^{n/2+3+\alpha'}$ [resp. $H^{n/2+4+\alpha'}$] en dehors de V, pour $\alpha' < 2\alpha$.

Théorème 2 : Soit u une solution de II de classe $H^{n/2+2+\alpha}$ $(\alpha > 0)$, et supposons que u soit microlocalement de classe H^{μ} au voisinage de $(x_o, \xi_o) \in V$, avec $\mu < \frac{n}{2} + 3 + 2\alpha$. Alors, u est microlocalement de classe H^{μ} le long de la bicaractéristique issue de (x_o, ξ_o).

Le théorème 1 repose sur des estimations a priori de type elliptique, et le théorème 2 sur une inégalité d'énergie. Les lemmes suivants permettent de contrôler les termes non linéaires, et font apparaître les limitations de régularité . Pour un ouvert conique Γ de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, on notera $u \in C^{\alpha}(\Gamma)$ si u est microlocalement de classe C^{α} en tout point de Γ.

Lemme 1 : Si $u \in C^{\alpha} \cap C^{\alpha'}(\Gamma)$, $v \in C^{\beta} \cap C^{\beta'}(\Gamma)$, alors $uv \in C^{\gamma} \cap C^{\gamma'}(\Gamma)$ avec $\gamma = \inf(\alpha, \beta)$; $\gamma' = \inf(\alpha', \beta', \alpha + \beta)$.

Si $u_1, \ldots, u_n \in C^{\alpha} \cap C^{\alpha'}(\Gamma)$ avec $\alpha' \leq 2\alpha$, et si F est C^{∞}, on a $F(u_1, \ldots, u_n) \in C^{\alpha} \cap C^{\alpha'}(\Gamma)$.

Lemme 2 : Si $a \in C^{1+\alpha} \cap C^{1+\alpha'}(\Gamma)$, si $u \in C^{\beta} \cap C^{\beta'}(\Gamma)$, et si K est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, on a

$$[K, a]u \in C^{\gamma} \cap C^{\gamma'}(\Gamma) \text{ avec } \gamma = \inf(1 + \alpha, 1 + \beta)$$

et $\gamma' = \inf(1 + \alpha', 1+\beta', 1+\alpha+\beta)$.

Les démonstrations font appel à la théorie de Littlewood-Paley et aux théorèmes de Bernstein sur l'approximation de F par des polynômes. Des lemmes analogues sont valables dans les espaces H^s ou $W^{s,p}$.