Journées Équations aux dérivées partielles

Bernard Hanouzet

Convergence uniforme pour les itérés définissant la solution d'une inéquation quasi-variationnelle

Journées Équations aux dérivées partielles (1978), p. 1

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A4_0>

Conférence n° 4

CONVERGENCE UNIFORME POUR LES ITERES DEFINISSANT LA SOLUTION D'UNE INEQUATION QUASI-VARIATIONNELLE

par B. HANOUZET

Les résultats annoncés ici ont été obtenus en collaboration avec Jean-Luc Joly.

1. Un théorème de point fixe (sous forme directement applicable). Soit S une application d'un intervalle $[\underline{u},\bar{u}]$ de $L^\infty(\Omega)$ dans lui-même, vérifiant :

(1) S est croissante et concave

(2) $\exists\ \lambda \in]0,1[$ tel que $\lambda\bar{u} + (1-\lambda)\underline{u} \leq S\underline{u}$.

Alors S possède un point fixe unique u dans l'intervalle $[\underline{u},\bar{u}]$. Si $u_o \in [\underline{u},\bar{u}]$ la suite $S^n u_o$ converge uniformément vers u et on a :

$$(3) \qquad \|S^n u_o - u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq (1-\lambda)^n \|\bar{u} - \underline{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

2. En appliquant ce résultat on montre que les itérés définissant la solution d'une inéquation quasi-variationnelle du type formel :

$$(4) \qquad \begin{cases} u - Mu \leq 0 \quad ; \quad -\Delta u + u - f \leq 0 \quad ; \\ (-\Delta u + u - f \ ,\ u - Mu) = 0 \end{cases}$$

convergent dans $L^\infty(\Omega)$ de façon géométrique quelle que soit la donnée initiale. On suppose ici que l'application M vérifie des propriétés du type (1) et (2) et on pose $S = \sigma \circ M$ où $\sigma(\psi)$ désigne la solution de l'inéquation variationnelle avec obstacle ψ associée naturellement à (4). Ces résultats s'appliquent en particulier quand M est de la forme :

$$Mu(x) = \underset{>0}{k} + \inf_{\substack{\xi \geq 0 \\ x+\xi \in \Omega}} u(x+\xi)$$

3. Ce travail a fait l'objet d'une note aux Comptes-Rendus (Mai ou Juin 1978). Il sera aussi repris dans un article accompagné de résultats de régularité.