Journées Équations aux dérivées partielles

Claude Wagschal

Problème de Cauchy à caractéristiques multiples dans les classes de Gevrey

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 206-216
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____206_0>

PROBLÈME DE CAUCHY À CARACTERISTIQUES MULTIPLES DANS LES CLASSES DE GEVREY

Claude WAGSCHAL

Dans cet exposé, nous nous proposons de donner quelques résultats concernant le problème de Cauchy non caractéristique pour des opérateurs différentiels linéaires à coefficients analytiques et à caractéristiques multiples. Ces résultats ont été obtenus par Y. Hamada, J. Leray et Cl. Wagschal dans [5] et ont été précisés ensuite avec J.Cl. de Paris dans [3,4] et indépendamment par H. Komatsu [7].

Indiquons le type de théorèmes auxquels conduisent ces études. On considère un opérateur $a(x,D)$ d'ordre m à coefficients dans l'anneau $\mathbb{R}\{x\}$ des germes de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{R}^{n+1}$ (les coordonnées d'un point x de $\mathbb{R}^{n+1}$ sont notées $(x^j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ et $x' = (x^j)_{1\leqslant j\leqslant n}$) et on considère le problème de Cauchy local

$$(0.1) \qquad \begin{cases} a(x,D)u(x) = v(x), \\ D^h u(x)\big|_S = w_h(x'), \ 0 \leqslant h < m, \end{cases}$$

où S désigne l'hyperplan $x^0 = 0$, supposé non caractéristique, c'est-à-dire

$$(0.2) \qquad g(0;\ 1,0,\ \dots,\ 0) \neq 0,$$

$g(x,\xi)$ désignant le polynôme caractéristique de l'opérateur $a(x,D)$. L'anneau des polynômes à $n+1$-indéterminées à coefficients dans l'anneau $\mathbb{R}\{x\}$ étant factoriel, on peut décomposer g en facteurs irréductibles

$$g(x,\xi) = \prod_s g_s(x,\xi)^{m_s}, \quad (m_s \geqslant 1);$$

chaque polynôme g_s est homogène, posons

$$d_s = \text{degré } g_s(x,\xi),$$

$$d = \sum_s d_s ,$$

et considérons le polynôme réduit de degré d

$$g_0(x,\xi) = \prod_s g_s(x,\xi).$$

Nous ferons une hypothèse d'hyperbolicité stricte sur le polynôme $g_0(x,\xi)$, à savoir

$$(0.3) \quad \begin{cases} \text{Pour tout } \xi' \in \mathbb{R}^n-\{0\}, \text{ l'équation en } \xi_0, \ g_0(0,\xi_0,\xi') = 0 \\ \text{admet d racines réelles et distinctes.} \end{cases}$$

Dans [5] , nous avons établi le

THEOREME 0.1. *Sous les hypothèses* (0.2) *et* (0.3), *si les fonctions* v *et* $(w_h)_{0\leqslant h<m}$ *sont de classe de Gevrey* α *au voisinage de l'origine avec* $1 \leqslant \alpha < \alpha_0 = \frac{m_0}{m_0-1}$, $m_0 = \operatorname{Max}_s m_s$, *le problème de Cauchy* (0.1) *admet une unique solution de classe de Gevrey* α.

Ce théorème ne nécessite aucune hypothèse sur les termes non principaux de l'opérateur. Des hypothèses supplémentaires sur la structure de la partie non principale permettent de préciser ce théorème, c'est-à-dire permettent d'améliorer la classe de Gevrey limite α_0. En particulier, si l'opérateur vérifie les conditions dites de Lévi, le problème de Cauchy est bien posé dans toute classe de Gevrey, ainsi que dans le $\mathcal{E}^\infty$; plus généralement, on peut faire des hypothèses de Lévi "partielles" ; ces hypothèses s'expriment simplement en terme de décomposition d'opérateur au sens de De Paris.

1. INDICE DE GEVREY ASSOCIE A UN OPERATEUR

On se donne un polynôme homogène $H(x,\xi)$ à n+1-indéterminées à coefficients dans $\mathbb{R}\{x\}$. Si $h(x,D)$ est un opérateur différentiel linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}\{x\}$ et de symbole principal $H(x,\xi)$, on sait d'après De Paris ([2, prop. 1]) qu'il existe, pour tout $r \in \{0, \ldots, m\}$ des entiers $\nu_r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et des opérateurs différentiels linéaires $\ell_r(x,D)$ ($\ell_r \equiv 0$ si $\nu_r = +\infty$) à coefficients dans $\mathbb{R}\{x\}$ et de symbole principal non divisible par H si $\nu_r \in \mathbb{N}$, tels que

$$(1.1) \qquad \begin{cases} a(x,D) = \sum_{r=0}^{m} \ell_r(x,D)h(x,D)^{\nu_r}, \\ \\ \text{ordre } \left(\ell_r h^{\nu_r}\right) = m-r, \quad \text{si } \nu_r \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où l'on convient que $\ell_r h^{\nu_r} \equiv 0$ si $\nu_r = +\infty$.

On constate sur des exemples simples qu'un même opérateur peut admettre plusieurs décompositions de la forme précédente avec des nombres ν_r différents; de plus ces entiers ν_r dépendent du choix de l'opérateur h de symbole principal H. Remarquons cependant que ν_0 est parfaitement déterminé : c'est simplement la multiplicité de H dans le symbole principal de l'opérateur a.

De Paris [2] a introduit une classe d'opérateurs, appelés bien décomposables, qui admettent une décomposition d'une forme particulière. La définition de cette classe utilise fondamentalement le résultat suivant [2, §4] : si l'opérateur $a(x,D)$ admet une décomposition particulière pour laquelle $\nu_r \geqslant \nu_0 - r$, alors ceci est encore vrai pour toute décompsition (quel que soit le choix de $h(x,D)$ de symbole principal $H(x,\xi)$). Un opérateur vérifiant la condition précédente est appelé par De Paris un *opérateur bien décomposable par rapport à* H : ceci signifie que

$$\begin{cases} a(x,D) = \sum\limits_{r=0}^{\nu_0} \ell_r(x,D)h(x,D)^{\nu_0-r}, \\ \text{ordre } (\ell_r h^{\nu_0-r}) \leqslant m-r, \qquad 0 \leqslant r \leqslant \nu_0 \ , \end{cases}$$

où le symbole principal de ℓ_0 n'est pas divisible par H.

Si l'opérateur a n'est pas bien décomposable par rapport à H, on peut "en extraire" la partie bien décomposable : il suffit d'écrire

$$a = a_0 + b$$

avec

$$a = \sum_{\nu_r \geqslant \nu_0 - r} \ell_r h^{\nu_r}, \quad b = \sum_{\nu_r < \nu_0 - r} \ell_r h^{\nu_r};$$

l'opérateur a_0 est un opérateur bien décomposable d'ordre $n_0 = m$, la multiplicité α_0 de H dans le symbole principal de a_0 étant égale à ν_0; si n_1 désigne l'ordre de l'opérateur b et α_1 la multiplicité de H dans le symbole principal de b on a

$$n_1 = m - r_1, \quad \text{où} \quad r_1 = \mathrm{Min}\{r;\ \nu_r < \nu_0 - r\} > 1,$$

$$\alpha_1 = \nu_{r_1},$$

d'où $n_1 = n_0 - r_1$ et $\alpha_1 < \alpha_0 - r_1$ et, par conséquent,

$$n_0 > n_1 \qquad \text{et} \qquad n_0 - \alpha_0 < n_1 - \alpha_1 .$$

En répétant le raisonnement précédent, on est conduit à la

PROPOSITION 1.1. *Etant donné un opérateur* a(x,D) *et un polynôme homogène* $H(x,\xi)$, *il existe des entiers* $q \in \mathbb{N}$ *et* $(n_p)_{0 \leqslant p \leqslant q}$, $(\alpha_p)_{0 \leqslant p \leqslant q}$ *déterminés de façon unique par les conditions suivantes*

(1.1) $$n_0 > n_1 > \dots n_q \geqslant 0$$

(1.2) $$n_0 - \alpha_0 < \dots < n_q - \alpha_q .$$

$$(1.3)\qquad \left\{\begin{array}{l}\textit{il existe des opérateurs bien décomposables par rapport à } H\\ (a_j)_{0\leq j\leq q} \textit{ d'ordre } n_j\textit{, la multiplicité de } H \textit{ dans le symbole}\\ \textit{principal de } a_j \textit{ valant } \alpha_j \textit{ et tels que } a = \sum_{j=0}^{q} a_j.\end{array}\right.$$

Nous définirons alors *l'indice de Gevrey* de l'opérateur a relatif à H par

$$(1.4)\qquad \alpha(H) = \begin{cases} \dfrac{\sigma(H)}{\sigma(H)-1}, & \text{si } q \geq 1,\\[2ex] +\infty \ , & \text{si } q = 0,\end{cases}$$

où

$$\sigma(H) = \operatorname*{Max}_{1\leq p\leq q} \frac{\alpha_0-\alpha_p}{n_0-n_p}\ , \qquad \text{si } q \geq 1.$$

Note.- Les trois propriétés "a est bien décomposable par rapport à H", "$q = 0$" et "$\alpha = +\infty$" sont donc équivalentes.

Remarque.- On vérifie facilement que cet indice coïncide avec celui proposé par H. Komatsu [6,7], à savoir

$$\sigma(H) = \operatorname*{Max}_{1\leq r\leq m} \frac{\nu_0-\nu_r}{r}\ .$$

Indiquons enfin le résultat suivant :

<u>PROPOSITION 1.2</u>. *On suppose le polynôme* H *irréductible. Si* a *et* b *sont deux opérateurs à coefficients analytiques, on a alors*

$$\alpha(a_\circ b;H) = \mathrm{Min}\,\big(\alpha(a;H),\alpha(b;H)\big).$$

En particulier, un produit d'opérateurs est bien décomposable par rapport à H si, et seulement si, chaque opérateur est bien décomposable par rapport à H; cette propriété généralise une propriété bien connue des polynômes hyperboliques (cf. par exemple [1, (3.11) et (3.12)])

2. RESULTATS

Revenons au problème de Cauchy (0.1); on peut montrer alors que ce problème est bien posé dans les espaces de Gevrey G^{α}, si $1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$, où

$$\alpha_0 = \underset{s}{\mathrm{Min}}\ \alpha(g_s).$$

L'analyticité des coefficients permet en fait de faire des hypothèses d'hyperbolicité partielle, notions introduites par J. Leray [8] ; rappelons-les brièvement.

On se donne une sous-variété linéaire T de S de codimension q relativement à S qui, modulo un changement de coordonnées locales, sera prise sous la forme

$$T : x^0 = x^1 = \dots = x^q = 0, \qquad 1 \leqslant q \leqslant n;$$

nous dirons que l'opérateur a(x,D) est *partiellement hyperbolique relativement à* S *modulo* T si, pour tout $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_q) \in \mathbb{R}^q - \{0\}$ l'équation en ξ_0

(2.1) $\quad g_0(0;\xi_0,\eta,0, \dots, 0) = 0$ admet d racines réelles et distinctes.

En posant $z = (x^{q+1}, \dots, x^n)$ et en notant $\mathcal{A}(\Omega;E)$ l'espace des fonctions $\mathbb{R}$-analytiques définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{\ell}$ et à valeurs dans un e.v.t. localement convexe, séparé et complet, on a le

THEOREME 2.1. *On fait l'hypothèse d'hyperbolicité* (2.1) *et on suppose* $1 \leqslant \alpha < \alpha_0 = \underset{s}{\mathrm{Min}}\ \alpha(g_s)$.

1. *Soient* Ω^j *des voisinages ouverts de l'origine de* $\mathbb{R}^j$ *(pour* j = q, q+1, n-q); *on suppose que les fonctions* $z \to w_h(\cdot,z)$ *et* $z \to v(\cdot,z)$ *appartiennent aux espaces* $\mathcal{A}(\Omega^{n-q}; G^{\alpha}(\Omega^q))$ *et* $\mathcal{A}(\Omega^{n-q}; G^{\alpha}(\Omega^{q+1}))$. *Alors, il existe un voisinage ouvert* Ω'^{n+1} *de l'origine de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *et une unique solution* $u \in G^{\alpha}(\Omega'^{n+1})$ *du problème de Cauchy* (0.1).

2. *Si q = n, la variable* z *disparaît et les hypothèses précédentes signifient simplement* $w_h \in G^{\alpha}(\Omega^n)$ *et* $v \in G^{\alpha}(\Omega^{n+1})$.

3. *En outre, si* $\alpha_0 = +\infty$, *c'est-à-dire si l'opérateur est bien décomposable par rapport à chaque* g_s, *on peut substituer dans les énoncés qui précèdent, l'espace* $\mathcal{E}^\infty$ *aux espaces de Gevrey* G^α.

Lorsque $q = 1$, on peut apporter des précisions intéressantes au théorème 2.1; en particulier, on peut montrer l'existence d'un domaine d'influence partielle (cf. [5, Remarque 10.3]). Indiquons ici comment se propage la régularité analytique. Pour simplifier, supposons $w \equiv 0$; comme dans le théorème 2.1, on suppose que les fonctions $z \longrightarrow w_h(\cdot,z)$ appartiennent à l'espace $\mathcal{A}\left(\Omega^{n-1}; G^\alpha(\Omega^1)\right)$; les fonctions $w_h(x')$ sont donc analytiques par rapport aux variables $(x^2, \dots, x^n)$ et de classe de Gevrey α par rapport à la variable x^1. Alors, si on note $k^i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant d$, les d solutions de l'équation des caractéristiques $g_0\left(x, \operatorname{grad} k^i(x)\right) = 0$ vérifiant $k^i(x)\big|_S = x^1$, on peut montrer que la solution du problème de Cauchy est de la forme

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} u^i\left(k^i(x),x\right),$$

où les fonctions $u^i(t,x)$ sont des fonctions analytiques par rapport aux variables $x = (x^0, \dots, x^n)$ et de classe de Gevrey α par rapport à la variable réelle t. Chacune des fonctions $x \longrightarrow u^i\left(k^i(x),x\right)$ est donc de classe de Gevrey α (donc u est de classe de Gevrey α) et admet une restriction analytique aux hypersurfaces analytiques $k^i(x) = ct$. En d'autres termes, la fonction u se décompose en une somme de fonctions, chacune d'elles admettant une restriction analytique sur l'une des familles des hypersurfaces caractéristiques issues des hyperplans de S parallèles à T.

3. METHODES

Indiquons dans cet exposé le principe de la démonstration du théorème 2.1 lorsque $q = n$.

La proposition 1.2 permet de supposer toutes les caractéristiques de même multiplicité, c'est-à-dire $m_s = m_0$, pour tout s : il suffit de chercher la solution du problème de Cauchy de la forme

$$u(x) = \prod_s g_s(x,D)^{m_s}\bar{u}(x).$$

On étudie d'abord le problème de Cauchy avec un second membre identiquement nul ($v \equiv 0$), le cas général s'obtenant ensuite grâce à la méthode de Duhamel. En outre, on peut supposer $\alpha > 1$ (le cas $\alpha = 1$ relevant du théorème de Cauchy-Kowalevski) et les fonctions w_h définies sur $\mathbb{R}^n$ et à support compact.

On utilise alors la méthode de Cauchy de la transformation de Fourier, qui consiste à chercher la solution sous la forme

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{U}(\xi',x)\,d\xi', \quad \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \tag{3.1}$$

où $\mathcal{U}$ est solution du problème

$$\begin{cases} a(x,D)\mathcal{U}(\xi',x) = 0, \\ D_0^h\mathcal{U}(\xi',x)\big|_S = (2\pi)^{-n/2} \quad e^{i\langle x',\xi'\rangle}\,\hat{w}_h(\xi'), \end{cases} \tag{3.2}$$

$\hat{w}_h$ désignant la transformée de Fourier de w_h.

L'opérateur $a(x,D)$ étant à coefficients analytiques, l'existence de $\mathcal{U}$ est assurée par le théorème de Cauchy-Kowalevski, mais ceci ne prouve ni l'intégrabilité de la fonction $\xi' \to \mathcal{U}(\xi',x)$, ni que l'éventuelle fonction définie par (3.1) est de classe de Gevrey α. Il s'agit essentiellement d'étudier le comportement de $\mathcal{U}$ quand ξ' tend vers l'infini. Pour faire cette étude, on procède de la façon suivante.

On construit les hypersurfaces caractéristiques issues des hyperplans de S : on note $\xi_0^i(\xi')$, $1 \leqslant i \leqslant d$, les racines de l'équation $g_0(0;\xi_0;\xi') = 0$ et on résoud les problèmes de Cauchy du 1er ordre

$$\begin{cases} g_0\big(x,\ \mathrm{grad}_x k^i(\theta,x)\big) = 0, \\ k^i(\theta,x)\big|_S = \langle x',\theta\rangle, \\ \mathrm{grad}_x k^i(\theta,x)\big|_{x=o} = \langle \xi_0^i(\theta),\theta\rangle , \end{cases}$$

où $\theta = \dfrac{\xi'}{\|\xi'\|} \in S^{n-1}$. On cherche alors $\mathcal{U}$ de la forme

$$\mathcal{U}(\xi',x) = \sum_{i=1}^{d} D_t^M \mathcal{U}^i\big(\xi',k^i(\theta,x),x\big), \tag{3.3}$$

où les fonctions inconnues $\mathcal{U}^i(\xi',t,x)$ sont des fonctions de $\xi' \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et où M est un entier $\geqslant 0$ suffisamment grand.

Il est alors aisé d'écrire des conditions suffisantes sur les fonctions $\mathcal{U}^i$ pour que (3.3) soit effectivement la solution problème (3.2). On utilise en particulier le lemme suivant, qui montre quel est le rôle des opérateurs bien décomposables.

<u>LEMME 3.1</u>. *Soit* $a(x,D)$ *un opérateur d'ordre* n, *bien décomposable par rapport à* H *de multiplicité* α. *Si* $H\big(x,\ \mathrm{grad}\ k(x)\big) = 0$, *on a, pour toute fonction* $u(t,x)$,

$$a(x,D)u\big(k(x),x\big) = \sum_{\ell=\alpha}^{n} P_\ell(x,D)D_t^{n-\ell}u(t,x)\Big|_{t=k(x)},$$

où $P_\ell(x,D)$ *est un opérateur différentiel linéaire d'ordre* $\leqslant \ell$ *et* $P_\alpha(x,D)$ *est une équation différentielle d'ordre* α *le long des bicaractéristiques tracées sur les hypersurfaces* $k(x) = \mathrm{cte}$.

On obtient ainsi des équations de la forme suivante (après avoir complexifié les variables $x = \big(x^0, \ldots, x^n)\big)$:

$$(3.4)\quad \begin{cases} D_0^{m_0}\mathcal{U}(t,x) = \sum\limits_{\ell=1}^{N} A_\ell^{m_0}(x,D)D_t^{m_0-\ell}\mathcal{U}(t,x) + \mathcal{W}_{m_0}(t,x), \\ D_0^{h}\mathcal{U}(t,x) - \sum\limits_{\ell=h+1}^{N} A_\ell^{h}(x,D)D_t^{h-\ell}\mathcal{U}(t,x) - \mathcal{W}_{h}(t,x) = O(x^0),\ 0 \leqslant h < m_0, \end{cases}$$

où

- les données $\mathcal{W}_h$ $(0 \leqslant h \leqslant m_0)$ et l'inconnue $\mathcal{U}$ sont des fonctions d'un paramètre réel t décrivant un intervalle compact I de $\mathbb{R}$ contenant l'origine et des variables complexes $x \in \mathbb{C}^{n+1}$; ces fonctions sont à valeurs dans un espace de Banach complexe F ;

- les opérateurs $A_\ell^h(x,D)$ sont des opérateurs différentiels linéaires, à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ à valeurs dans un espace de Banach complexe E ;

- on se donne une application bilinéaire continue $(a,u) \to au$ de $E \times F$ dans F, notée multiplicativement, ce qui permet de donner un sens aux équations (3.4) ;

- enfin $D_t^{-j}\mathcal{U}(t,x)$, pour $j \geqslant 0$, désigne la primitive de $\mathcal{U}$ d'ordre j par rapport à t s'annulant j fois pour $t = 0$.

On a en outre les propriétés suivantes :

$$(3.5)\quad \begin{cases} \text{ordre } (A_\ell^h) \leqslant \ell\ , \text{ pour tout } \ell \text{ et tout } h, \\ \text{ordre}_{\,x^0}(A_{m_0}^{m_0}) < m_0, \\ a(\ell) = \text{ordre}(A_\ell^{m_0}) < \ell, \text{ pour } 1 \leqslant \ell < m_0. \end{cases}$$

Note.- Dans ces équations, il n'apparaît plus les paramètres i et ξ' : ces paramètres sont en fait "cachés" dans les espaces E et F qui sont, dans l'application qui est faite du théorème abstrait ci-dessous, des espaces de fonctions en ξ' (cf. [5]).

Posons

$$\alpha_0 = \operatorname*{Min}_{1\leq \ell < m_0} \frac{m_0-a(\ell)}{m_0-\ell} \in \left]1,+\infty\right] .$$

On a alors le

THEOREME 3.2. *Soit* $1 \leq \alpha < \alpha_0$. *Pour tout voisinage ouvert* $\mathcal{O}$ *de l'origine de* $\mathbb{C}^{n+1}$, *il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{O}_1$ *de l'origine de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *et un nombre* $\ell_0 > 0$ *tels que, si la longueur de l'intervalle* I *est inférieure à* ℓ_0 et si $\mathcal{W}_h \in \mathcal{H}(\mathcal{O};G^\alpha(I;F))$, *le problème* (3.4) *possède une unique solution* $\mathcal{U} \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_1;G^\alpha(I;F))$. *En outre, si* $\alpha_0 = +\infty$, *on peut substituer à l'espace* $G^\alpha(I;F)$, *l'espace* $\mathcal{E}^\infty(I;F)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. ATIYAH, R. BOTT, L. GARDING.- Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, Acta Math., 124, 1970, pp. 109 à 189.

[2] J.-Cl. DE PARIS.- Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples; lien avec l'hyperbolicité, J. Math. pures et appl. T. 51, 1972, p. 231 à 256.

[3] J.-Cl. DE PARIS et C. WAGSCHAL.- Problèmes de Cauchy analytique à caractéristiques multiples, C.R. Acad. Sc., Paris, t. 283, Série A, 1976, p. 345 à 348.

[4] J.-Cl. DE PARIS et C. WAGSCHAL.- Problème de Cauchy non caractéristique à données Gevrey pour un opérateur analytique à caractéristiques multiples, J. Math. pures et appl., à paraître.

[5] Y. HAMADA, J. LERAY et C. WAGSCHAL.- Système d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle, J. Math. pures et appl., 55, 1976, p. 297 à 352.

[6] H. KOMATSU.- Irregularity of characteristic elements and construction of null-solutions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 23, 1976, p. 297 à 342.

[7] H. KOMATSU.- Irregularity of characteristic elements and hyperbolicity, Preprint.

[8] J. LERAY.- Opérateurs partiellement hyperboliques, C.R. Acad. Sci., Paris, t. 276, série A, 1973, p. 1685-1687.

Claude WAGSCHAL
LABORATOIRE CENTRAL DES PONTS & CHAUSSEES
58 bld Lefebvre - 75732 PARIS CEDEX 15 (France).