JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN VAILLANT

Propriété de symétrie des matrices localisées d'une matrice fortement hyperbolique en un point multiple

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 190-205

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____190_0>

PROPRIETE DE SYMETRIE DES MATRICES LOCALISEES D'UNE MATRICE FORTEMENT HYPERBOLIQUE EN UN POINT MULTIPLE

par

Jean VAILLANT

Soit $H(\xi)$ une matrice fortement hyperbolique à coefficients réels et $\eta \neq 0$ un point de multiplicité k pour le déterminant de H. Pour un polynôme hyperbolique P, ATIYAH, BOTT, et GÅRDING [(1)] ont défini le polynôme localisé du polynôme P en un point multiple et décrit ses propriétés. Nous définissons pour la matrice $H(\xi)$ des matrices carrées à k lignes, $\mathcal{H}(\xi)$, linéaires en ξ, que nous appelons localisées de $H(\xi)$ en η et qui ont les propriétés convenables : leur déterminant est proportionnel à la localisation en η de $\det H$, le support de la solution élémentaire de $\mathcal{H}$ est inclus dans le support singulier de celle de H [(4)], ou, autrement dit, les termes successifs de la partie relative à η d'une solution asymptotique se calculent à l'aide de l'opérateur $\mathcal{H}(D)$.

Le résultat principal de ce travail est le suivant : pourvu que la dimension réduite de $\mathcal{H}(\xi)$ soit supérieure ou égale à $\frac{k(k+1)}{2}$, -c'est-à-dire que le nombre minimum de variables ξ_α, grâce auxquelles, dans une base convenable, on peut exprimer $\mathcal{H}(\xi)$ soit supérieur ou égal à $\frac{k(k+1)}{2}$ -, $\mathcal{H}(\xi)$ est symétrisable par une matrice inversible ; de façon précise, si N est la direction d'hyperbolicité, $\mathcal{H}^{-1}(N)\ \mathcal{H}(\xi) = T^{-1}\, S(\xi)\, T$, où $S(\xi)$ est symétrique pour tout ξ, T ne dépend pas de ξ.

P.D. LAX [(3)] avait mis en évidence le fait que la symétrisabilité n'était pas nécessaire à l'hyperbolicité forte ; on voit ici que les matrices localisées sont toujours symétrisables. Pour obtenir ce résultat, on a besoin, en particulier, d'une proposition qui peut porter un intérêt en soi : une matrice $k \times k$ de formes linéaires $\mathcal{H}(\xi)$, diagonalisable pour tout ξ, de dimension réduite $\geqslant \frac{k(k+1)}{2}$, telle que les différences 2 à 2 des formes de la diagonale n'appartiennent pas au sous-espace engendré par les formes non diagonales est symétrisable par une matrice diagonale indépendante de ξ à coefficients positifs. Cette propriété annoncée dans [9] pour $k = 3$ a été obtenue dans le cas général, en collaboration avec D. SHILTZ.

La propriété de symétrie des matrices localisées obtenue sera utilisée dans un prochain travail où nous décrirons la propagation des singularités des solutions du problème de CAUCHY pour $H(D)$.

Cette Conférence est le résumé d'un article à paraître aux "Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa".

§1 - On désigne par E un espace vectoriel réel de dimension $n+1$ et par E^* l'espace vectoriel dual ; on note ξ un élément de E^*. On note $\mathcal{H} = (\mathcal{H}^{\bar{C}}_{\bar{D}})$, $1 \leq \bar{C}$, $\bar{D} \leqslant k$ une matrice carrée d'ordre k d'éléments de E ; un vecteur de E définit une forme linéaire sur E^* ; à tout ξ, $\mathcal{H}$ fait correspondre une matrice numérique réelle $\mathcal{H}(\xi)$ dont les éléments sont les valeurs de chaque vecteur élément de $\mathcal{H}$ pour ξ. On note dét $\mathcal{H}$ l'application polynomiale homogène de degré k :

$$\xi \longrightarrow \text{dét } \mathcal{H}(\xi) \quad .$$

<u>Définition</u> 1 - On appelle linéalité de $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel $L(\mathcal{H})$ de E^* orthogonal du sous-espace vectoriel de E engendré par les éléments de $\mathcal{H}$. On appelle dimension réduite de $\mathcal{H}$ le nombre :

$$d(\mathcal{H}) = n + 1 - \dim L(\mathcal{H})$$

On suppose désormais : dét $\mathcal{H} \not\equiv 0$.

<u>Lemme</u> 1 - Si $\xi \in L(\mathcal{H})$, ξ est un point multiple d'ordre k de dét $\mathcal{H}$.

Lemme 2 - Si T est une matrice réelle inversible d'ordre k ,

$$d(T.\mathcal{H}) = d(\mathcal{H}) \quad .$$

P désigne une application polynômiale homogène réelle sur E^* de degré k .

Définition 2 [1] - On appelle linéalité de P le sous-espace vectoriel $L(P)$ de E^* dont les éléments sont les ξ tels que $P(\xi+\zeta) = P(\zeta)$ pour tout $\zeta \in E^*$. $L(P)$ est aussi l'ensemble des ξ de multiplicité k pour P . On appelle dimension réduite de P le nombre $d(P) = n + 1 - \dim L(P)$.

Lemme 3 - Si $\xi \in L(\mathcal{H})$, $\xi \in L(\text{dét}\mathcal{H})$; $d(\text{dét}\mathcal{H}) \leq d(\mathcal{H})$.

Soit $N \in E^*$, tel que $\text{dét}\,\mathcal{H}(N) \neq 0$; on pose $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^{-1}(N)\mathcal{H}$;

Soit une base de premier vecteur N ; on notera ξ' un élément de composantes $(0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Un élément quelconque ξ de E^* s'écrira aussi : $\xi = \xi_o N + \xi'$.

Lemme 4 - On peut choisir une base de E^* dont le premier vecteur soit N et dont les autres éléments sont dans le noyau de $\mathcal{H}'^1_1$, ($\mathcal{H}'^1_1$ élément de la 1ère ligne et de la 1ère colonne de $\mathcal{H}'$), on a alors

$$\mathcal{H}'(\xi) = \xi_o I + (\varphi^{\bar{c}}_{\bar{D}}(\xi)) \quad ,$$

où $\varphi^1_1 = 0$; $\varphi^{\bar{c}}_{\bar{D}}(N) = 0$.

Nour rappellerons [2] [5] [6] la :

Définition 3 - Pour que $\mathcal{H}$ soit fortement hyperbolique par rapport à N , il faut et il suffit que, pour un choix d'une base de E^* de 1° vecteur N ,

a) pour tout ξ' , (de coordonnées $(0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ dans cette base), les valeurs propres de $\mathcal{H}'(\xi')$ soient toutes réelles et $\mathcal{H}'(\xi')$ soit diagonalisable : il existe $M(\xi')$ telle que $M^{-1}(\xi')\,\mathcal{H}'(\xi')\,M(\xi')$ soit diagonale, (ou bien la dimension de l'espace propre correspondant à chaque valeur propre soit égale à la multiplicité de cette valeur propre).

b) La diagonalisation soit uniforme : il existe un nombre $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout ξ' appartenant à la sphère unité, on puisse trouver une matrice diagonalisatrice $M(\xi')$ dont les colonnes soient de longueur euclidienne 1 et telle que $|\text{dét}\,M(\xi')| \geq \varepsilon$.

On sait de plus que, si on choisit une autre base de 1° vecteur N , les conditions analogues dans cette base sont réalisées.

Nous utiliserons alors la

Définition 4 - Si pour un choix d'une base de E^* de 1er vecteur N , $\mathcal{H}$ satisfait la condition a), on dira que $\mathcal{H}$ est diagonalisable par rapport à N .

On voit encore que pour tout autre base de 1er vecteur N , $\mathcal{H}$ satisfait à a).

On obtient alors la :

Proposition 1 - Si $\mathcal{H}$ est diagonalisable par rapport à N , alors $d(\mathcal{H}) = d(\text{dét}\,\mathcal{H})$.

Lorsque $\mathcal{H}$ est diagonalisable son étude sera facilitée par le

lemme 5 - Si $\mathcal{H}$ est diagonalisable par rapport à N et si :

$d(\mathcal{H}) \geq \frac{k(k+1)}{2}$, alors, avec les notations du lemme 4, les vecteurs $(\varphi\frac{\bar{C}}{\bar{D}})$, $\bar{C} \geq \bar{D}$, $(\bar{C} , \bar{D}) \neq (1 , 1)$ sont linéairement indépendants.

Pour simplifier la typographie, nous remplacerons dans les démonstrations du lemme 5 et des propositions 2 et 3, les indices $\bar{C}$, $\bar{D}$, par des indices, i, j, p, q .

Si la dimension du sous-espace engendré par les (φ^i_j), $i \geq j$, $(i,j) \neq (1,1)$ était strictement inférieure à $\frac{k(k+1)}{2} - 1$, du fait de l'hypothèse sur $d(\mathcal{H})$, on pourrait choisir un vecteur φ^p_q , $p < q$, qui n'appartiennne pas à ce sous-espace et un ξ' tel que $(\varphi^i_j(\xi')) = 0$ et $\varphi^p_q(\xi') = 1$; pour ce ξ' , $\xi_o = 0$ serait racine multiple d'ordre k et on devrait avoir $\varphi^p_q(\xi') = 0$, d'après la définition 4, d'où une contradiction.

Proposition 2 - Si $\mathcal{H}$ est diagonalisable par rapport à N et si $d(\mathcal{H}) \geq \frac{k(k+1)}{2}$, alors pour un choix quelconque d'une base de E^* de 1er vecteur N, le discriminant par rapport à ξ_o de dét $\mathcal{H}$ n'est pas identiquement nul.

On voit tout de suite qu'il suffit de le démontrer pour une base de E^* de premier vecteur N choisie commodément ; choisissons une base dans les conditions du lemme 4 ; compte tenu du lemme 5, on peut trouver un point ξ' tel que

$$\varphi^i_j(\xi') = 0 \ , \ i > j \ ; \ \varphi^i_i(\xi') = i \ ; \ i \neq 1 \ ,$$

les racines en ξ_o correspondantes sont toutes distinctes et la proposition est démontrée.

Proposition 3 - On suppose que $\mathcal{H}$ est diagonalisable par rapport à N, que $d(\mathcal{H}) \geqslant \frac{k(k+1)}{2}$ et que les vecteurs $\mathcal{H}'\frac{\bar{C}}{C} - \mathcal{H}'\frac{\bar{D}}{D}$, $\bar{C} \neq \bar{D}$, n'appartiennent pas au sous-espace de E engendré par les vecteurs $\mathcal{H}'\frac{\bar{C}}{C}$, $\bar{C} \neq \bar{D}$. Alors $\mathcal{H}'$ est symétrisable par une matrice réelle diagonale inversible D à termes positifs, c'est-à-dire que : $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^{-1}(N)\ \mathcal{H} = D^{-1}\ S\ D$, où S est une matrice de vecteurs de E, symétrique. $\mathcal{H}$ est donc fortement hyperbolique par rapport à N et $d(\mathcal{H}) = \frac{k(k+1)}{2}$.

Démonstration de la propostion 3.

a) Comme dans le lemme 4, N est le 1er vecteur de base de $E^\star$ et les autres vecteurs de base seront pris dans le noyau de $\mathcal{H}'^1_1$; d'après le lemme 5 les vecteurs φ^i_j, $i \geqslant j$, $(i,j) \neq (1,1)$ de E sont linéairement indépendants et du lemme 4 résulte qu'ils définissent aussi des formes linéaires indépendantes du dual du noyau de $\mathcal{H}'^1_1$; on prendra aussi la base du noyau telle que les φ^i_j considérés appartiennent à la base duale. Un point ξ' du noyau aura les coordonnées correspondantes notées ξ^i_j au cours de cette démonstration : $\xi^i_j = \varphi^i_j(\xi')$.
Pour tout ξ' tel que $\xi^i_j = 0$, $i \geqslant j$, $(i,j) \neq (1,1)$, $\xi_o = 0$ est racine multiple d'ordre k de det $\mathcal{H}'(\xi_o N + \xi') = 0$ et l'on a pour un tel point :

$$\forall p,\ q,\ p < q,\ \varphi^p_q(\xi') = 0.$$

On a donc pour ξ quelconque, si $p < q$, $\varphi^p_q(\xi) = \sum\limits_{i \geqslant j} a^{pj}_{qi}\ \xi^i_j$; $a^{pj}_{qi} \in \mathbb{R}$.

b) On démontre ensuite qu'en fait :

$$\text{si} \qquad p < q,\ \varphi^p_q(\xi) = \sum_{i>j} a^{pj}_{qi}\ \xi^i_j\ .$$

On choisit pour cela ξ' tel que :

$$\xi^i_j = 0 \qquad \text{pour tout } i > j.$$

On démontre d'abord que :

$$\varphi^p_q(\xi') = \sum_{i=p}^{q} a^{pi}_{qi}\ \xi^i_i$$

On écrit pour cela que, j étant fixé :

$$(\forall i,\ i \neq j\ ,\ \xi_i^i = 0) \quad \text{et} \quad \xi_j^j \neq 0,$$

et que la racine obtenue en ξ_o est multiple d'ordre k-1.

Ensuite on procède par récurrence sur q-p. Pour q-p = 1, on construit une racine multiple en ξ_o d'ordre k-1 égale à -1 et on se sert de l'hypothèse faite sur les vecteurs diagonaux. On achève la récurrence en construisant de même des racines multiples d'ordre k-1.

c) On montre, par récurrence sur q-p, que

$$a_{qq}^{pp} \neq 0$$

et

$$\forall u,v,\ u < v,\quad (u,v) \neq (p,q) \quad a_{vq}^{up} = 0$$

Le résultat s'obtient par constructions encore de racines multiples en ξ_o égales à 0 ou à -1, et par annulation des mineurs correspondants.

Enfin de la réalité des racines, on déduit que, de façon générale :

$$a_{qq}^{pp} > 0\ .$$

d) On a donc, en posant :

$$a_{qq}^{pp} = a_q^p\ :$$

si $p < q$:

$$\varphi_q^p(\xi) = a_q^p\ \xi_p^q\ ,\ a_q^p > 0\ .$$

On se propose de démontrer que $\mathcal{H}'(\xi_o N + \xi')$ est symétrisable par une matrice réelle diagonale à termes diagonaux strictement positifs.

On remarquera d'abord que, $\forall (p,q)\ :\ 1 < p < q$, on a :

$$a_p^1\ a_q^p = a_q^1\ .$$

On pose pour cela : $\xi^i_j = 0$ pour tout $i \geqslant j$, $(i,j) \notin \{(p,1),\ (q,1),\ (q,p)\}$ et on écrit que le déterminant de la matrice ci-dessous a toutes ses racines en ξ_o réelles :

$$\begin{pmatrix} \xi_o & a^1_p\ \xi^p_1 & a^1_q\ \xi^q_1 \\ \\ \xi^p_1 & \xi_o & a^p_q\ \xi^q_p \\ \\ \xi^q_1 & \xi^q_p & \xi_o \end{pmatrix}$$

D'autre part pour que la matrice $\mathcal{H}'(\xi)$ soit symétrisable par une matrice diagonale réelle à coefficients diagonaux strictement positifs notés D_r , $1 \leqslant r \leqslant k$, il faut et il suffit que l'on puisse trouver des D_r , vérifiant pour tous (p,q), $p < q$

$$\sqrt{a^p_q} = \frac{D_p}{D_q} \quad .$$

Comme on sait que si $1 < p < q$, $a^p_q = \dfrac{a^1_q}{a^1_p}$, il suffit de prendre :

$$D_1 = 1 \quad , \quad D_q = \frac{1}{\sqrt{a^1_q}} \qquad \text{pour } q > 1 \quad .$$

On a bien alors :

$$\mathcal{H}'(\xi) = D^{-1}\ S(\xi)D \quad .$$

$S(\xi)$ est symétrique pour tout ξ ; $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}$ sont fortement hyperboliques par rapport à N et $d(\mathcal{H}) = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

§2 - On note $H(\xi)$ une matrixe $m \times m$ de polynômes homogènes d'ordre t à coefficients réels. Des indices A,B ,... varient de 1 à m ; on a ainsi : $H(\xi) = (H^A_B(\xi))$. On notera $A^B_A(\xi)$ le cofacteur de $H^A_B(\xi)$ dans la matrice $H(\xi)$. La définition 3 de l'hyperbolicité forte pour $t = 1$ se généralise [(2)] ; nous la donnerons sous une forme voisine de [(8)] p. 39. On suppose dét $H(N) \neq 0$.

<u>Définition</u> 5 - Pour que H soit fortement hyperbolique par rapport à N , il faut et il suffit que, pour un choix d'une base de E^* de 1er vecteur N :

a) pour tout ξ' , (de coordonnées $(0, \xi_1 , \ldots, \xi_n)$ dans cette base), les racines en ξ_o de $\det H(\xi_o , \xi')$ soient toutes réelles et la dimension du noyau de $H(\xi_o , \xi')$ soit égale à la multiplicité de la racine correspondante.

b) En notant S la sphère unité de $\xi_o = 0$, $(\xi_{o1} , \ldots, \xi_{op} \ldots \xi_{o\ell})$ les racines correspondant à $\xi' \in S$, il existe un nombre strictement positif ε tel que pour tout $\xi' \in S$, pour tout p , il existe une base $(d_{p\,\underline{D}(p)} (\xi'))$ $[1 \leq \underline{D}(p) \leq$ multiplicité $k(p)$ de la racine $\xi_{op}]$ normée, (vecteurs de longueur 1), du noyau de $H(\xi_{op} , \xi')$ telle que :

$$|\det \Delta(\xi')| \geq \varepsilon$$

$$\Delta(\xi') = \begin{bmatrix} \vdots & d^B_{p1} & \vdots & d^B_{p\underline{D}} & \vdots & d^B_{pk} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (\xi_{op})^q \; d^B_{p1} & \vdots & (\xi_{op})^q \; d^B_{p\underline{D}} & \vdots & (\xi_{op})^q \; d^B_{pk} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (\xi_{op})^{t-1} \; d^B_{p1} & \vdots & (\xi_{op})^{t-1} \; d^B_{p\underline{D}} & \vdots & (\xi_{op})^{t-1} \; d^B_{pk} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

On aura aussi [2] [5] [6] la condition équivalente de SVENSSON.

<u>Définition</u> 5' - Pour que H soit fortement hyperbolique par rapport à N , il faut et il suffit que :

a) $\det H(\xi + i N) \neq 0$, $\forall \xi \in E^*$

b) il existe un réel C tel que, pour tout ξ , A , B :

$$\left| \frac{A^B_A(\xi + i N)}{\det H(\xi + i N)} \right| \leq C \, (1 + |\xi|)^{1-t}$$

où $|\xi|$ désigne la norme euclidienne de ξ .

On supposera désormais H <u>fortement hyperbolique par rapport à</u> N . Dans toute la suite, η <u>est un point multiple d'ordre</u> k <u>de</u> det H et $\eta \neq 0$.

On a immédiatement le :

<u>Lemme</u> 6 – La dimension du noyau de $H(\eta)$, (resp. de sa transposée) est k .

On note $(d_{\bar{D}})$, $1 \leq \bar{D} \leq k$, (resp. $(g^{\bar{C}})$) , $1 \leq \bar{C} \leq k$ une base du noyau de $H(\eta)$, (resp. de la matrice transposée). On utilise les conventions matricielles habituelles.

<u>Définition</u> 6 – On appelle matrice localisée de H en η toute matrice k x k de la forme :

$$\mathcal{H}_\eta(d,g,\xi) = \left(\sum_{0 \leq \alpha \leq n} g^{\bar{C}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}(\eta) \cdot d_{\bar{D}}\, \xi_\alpha \right), \quad 1 \leq \bar{C}\,, \bar{D} \leq k \;.$$

<u>Lemme</u> 7 – Si $\mathcal{H}_\eta(d\,,g\,,\xi)$ et $\mathcal{H}_\eta(d\,,\gamma\,,\xi)$ sont deux matrices localisées en η alors :

$$\mathcal{H}_\eta(\delta\,,\gamma\,,\xi) = \Lambda \;.\; \mathcal{H}_\eta(d\,,g\,,\xi)\,.\,M \;,$$

où M est la matrice inversible de passage de la base d à la base δ , (resp. Λ de g à γ).

On rappellera d'après ([1]), la :

<u>Définition</u> 7 – On appelle localisation en η de P le premier coefficient non nul du développement de $P(\eta + r\,\zeta)$ en puissances croissantes de $r \in \mathbb{R}$; la puissance de r correspondante est la multiplicité de η pour P .

On obtient, ([4]), le

<u>Lemme</u> 8 – Les matrices localisées de H en η sont fortement hyperboliques par rapport à N ; leurs déterminants sont proportionnels à la localisation en η de det H , soit $(\det H)_\eta$.

Compte tenu du lemme 7, il suffit de le démontrer pour un choix commode de vecteurs du noyau de la base de $H(\eta)$ et de sa transposée. On notera :

$A^{B_1 \ldots B_p}_{A_1 \ldots A_p}$ le cofacteur obtenu en rayant dans H les lignes d'indice $A_1 \ldots A_p$ et les colonnes d'indice $B_1,\dots,B_p$. D'après le lemme 6 un des cofacteurs d'ordre m-k est non nul en η ; on peut supposer que c'est $A^{12\dots k}_{12\dots k}$; on a donc $A^{12\dots k}_{12\dots k}(\eta) \neq 0$.

On pose :

$$\delta^{B}_{\bar{D}} = A^{12\ \dots\ (\bar{D}-1)\ B(\bar{D}+1)\ \dots\ k}_{12\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ k}(\eta)$$

, en convenant que si B prend une des valeurs $1, 2, \dots, (\bar{D}-1), (\bar{D}+1) \dots k$, alors $\delta^{B}_{\bar{D}} = 0$. De même

$$\gamma^{\bar{C}}_{A} = A^{12\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ k}_{12\ \dots\ (\bar{C}-1)\ A(\bar{C}+1)\ \dots\ k}(\eta)$$

Les $(\delta_{\bar{D}})$ forment une base de $H(\eta)$; de même les $(\gamma^{\bar{C}})$ pour la transposée.

On a encore ([7])

$$(\mathcal{H}_\eta(\delta,\gamma,\xi))^{\bar{C}}_{\bar{D}} = A^{12\ \dots\ k}_{12\ \dots\ k}(\eta)\ .\ (-1)^{(\bar{C}+\bar{D})} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} A^{12\dots(\bar{D}-1)\ (\bar{D}+1)\ \dots\ k}_{12\dots(\bar{C}-1)\ (\bar{C}+1)\ \dots\ k}(\eta)\xi_\alpha$$

Posons :

$$\mathcal{A}'^{\bar{C}}_{\bar{D}} = (-1)^{(\bar{C}+\bar{D})} A^{12\ \dots\ (\bar{D}-1)\ (\bar{D}+1)\ \dots\ k}_{12\ \dots\ (\bar{C}-1)\ (\bar{C}+1)\ \dots\ k} \ ;\ \mathcal{A}' = (\mathcal{A}'^{\bar{C}}_{\bar{D}})\ ;\ A = (A^{\bar{C}}_{\bar{D}}) .$$

On a les identités : (cf par ex. ([7])) :

$$\mathcal{A}'\ .\ A = \text{dét}\ H\ .\ A^{12\ \dots\ k}_{12\ \dots\ k}\ I \qquad ,$$

où I désigne la matrice unité d'ordre k et

$$\text{dét}\ \mathcal{A}' = \text{dét}\ H\ .\ (A^{12\ \dots\ k}_{12\ \dots\ k})^{k-1} \qquad .$$

En localisant ces identités en η et en utilisant la condition de SVENSSON localisé en η , on obtient l'hyperbolicité forte de la matrice

$$\sum_{\alpha} \partial^{\alpha} \mathcal{A}'(\eta)\,\xi_\alpha$$

et le lemme 8 est démontré.

Remarque 2 - On en déduit ([4]) que le support de la solution élémentaire hyperbolique d'une matrice localisée est inclus dans le support singulier de la solution élémentaire de la matrice H ; cette remarque et les résultats de propagation obtenus justifient la définition 6.

Nous rappellerons maintenant un résultat de ([3]) ([1]) que nous écrirons sous une forme adaptée à notre étude. On prend une base de E^* de premier vecteur N .

Lemme 9 - $r \in \mathbb{R}$, μ'a pour coordonnées $(0, \mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_n)$, $\mu' \in E^*$; $\mu' \neq 0$, $s \in \mathbb{C}$; le polynôme :

$$(r,s) \longrightarrow \det H\,(\eta + r\,\mu' + s\,N)$$

se factorise sous la forme :

$$\det H(\eta + r\,\mu' + s\,N) = \det H(N)\,[s-\lambda^1(r)]\ldots[s-\lambda^{\bar D}(r)]\ldots\,[s-\lambda^k(r)] = Q(r,s)$$

où les fonctions

$$r \in \mathbb{R} \longrightarrow \lambda^{\bar D}(r) \quad , \quad 1 \leqslant \bar D \leqslant k \ ,$$

sont à valeurs réelles, analytiques, telles que : $\lambda^{\bar D}(0) = 0$; Q se décompose de façon analogue, mais les racines $\lambda^{k+1}(r) ,\ldots, \lambda^{mt}(r)$ sont non nulles pour $r = 0$ et $Q(0\,,\,0) \neq 0$.

Lemme 10 - On pose : $\mu_o^{\bar D} = \frac{d\lambda^{\bar D}}{dr}(0)$; $\mu^{\bar D} = \mu_o^{\bar D}\,N + \mu'$, $\mu^{\bar D}$ a pour coordonnées : $(\mu_o^{\bar D}, \mu_1 \ldots \mu_n) = (\mu_\alpha^{\bar D})$; $(\det H)_\eta$ est la localisation en η de $\det H$; alors, pour μ' donné :

$$(\det H)_\eta\ (\mu_o\,N + \mu') = 0$$

a pour racines en μ_o les valeurs $\mu_o^{\bar D}$, $1 \leqslant \bar D \leqslant k$; ainsi $\forall \bar D$:

$$(\det H)_\eta\ (\mu^{\bar D}) = 0 \quad .$$

On suppose, jusqu'au lemme 14 inclus que μ' est tel que : $\mu_o^{\bar C} \neq \mu_o^{\bar D}$, pour $\bar C \neq \bar D$.

On construit alors des bases des noyaux des matrices $H(\eta + r\,\mu' + \lambda^{\bar D}(r)\,N)$ correspondant à chaque $\bar D$, analytiques en r et pour $r = 0$ formant une base de $H(\eta)$.

Lemme 11 - Pour tout (B,A) , $1 \leqslant A$, $B \leqslant m$, et $\bar D$, $1 \leqslant \bar D \leqslant k$:

$$\frac{d^p}{dr^p}\left[A\,{}^{B}_{A}(\eta + r\ \mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)\ N)\right](0) = 0 \quad , \text{ si } \quad 0 \leq p \leq k-2 \quad .$$

Soit $A^{1\ 2\ \dots\ k}_{1\ 2\ \dots\ k}(\eta) \neq 0$; pour chaque $\bar{D}$, on peut choisir $\bar{E}(\bar{D})$ et $\bar{F}(\bar{D})$ tels que :

$$\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}}\left[A\,{}^{\bar{F}\ (\bar{D})}_{\bar{E}\ (\bar{D})}(\eta + r\ \mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)\ N)\right](0) \neq 0 \quad .$$

On pose, pour $r \neq 0$:

$$d^B_{\bar{D}}(r) = \frac{A^{B}_{\bar{E}\ (\bar{D})}(\eta + r\ \mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)\ N)}{\left[\sum_B \left(A^{B}_{\bar{E}\ (\bar{D})}(\eta + r\ \mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)\ N)\right)^2\right]^{1/2}}$$

et de même :

$$g^{\bar{C}}_A(r) = \frac{A^{\bar{F}\ (\bar{C})}_{A}(\dots\ \lambda^{\bar{C}})}{\left[\sum_A \left(A^{\bar{F}(\bar{C})}_{A}(\dots)\right)^2\right]^{1/2}}$$

pour $r = 0$:

$$d^B_{\bar{D}}(0) = \frac{\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}}\left[A^{B}_{\bar{E}(\bar{D})}(\eta + r\ \mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)\ N)\right](0)}{\left[\sum_B \left(\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}}\left[A^{B}_{\bar{E}(\bar{D})}(\eta + r\ \mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)\ N)\right](0)\right)^2\right]^{1/2}}$$

et :

$$g^{\bar{C}}_A(0) = \frac{\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}}\left[A\,{}^{\bar{F}\ (\bar{C})}_{A}(\dots)\right](0)}{\left[\sum_A \left(\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}}\left[A^{\bar{F}(\bar{C})}_{A}(\dots)\right](0)\right)^2\right]^{1/2}}$$

Dans un voisinage de $r = 0$,

a) les vecteurs $d_{\bar{D}}$ et $g^{\bar{C}}$ sont fonctions analytiques de r .

b) $\forall r \neq 0$, $\forall \bar{D}$, $d_{\bar{D}}(r)$ est une base du noyau de

$$H(\eta + r\ \mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)\ N) \quad ;$$

pour $r = 0$ la famille $(d_{\bar{D}}(0))$, $1 \leqslant \bar{D} \leqslant k$ forme une base du noyau de $H(\eta)$.

$\forall r \neq 0$, $\forall \bar{C}$, $g^{\bar{C}}(r)$ est une base du noyau de la transposée de

$$H(\eta + r\,\mu' + \lambda^{\bar{C}}(r)\,N) \quad ;$$

pour $r = 0$, la famille $(g^{\bar{C}}(0))$, $1 \leqslant \bar{C} \leqslant k$ forme une base du noyau de la transposée de $H(\eta)$.

Le a) s'obtient en exprimant l'ordre d'annulation de $\det H$ et des mineurs de H pour $r = 0$ et en utilisant l'identité de Jacobi.

Pour obtenir le b), on a d'abord si $r \neq 0$:

$$H(\eta + r\,\mu' + \lambda^{\bar{D}}(r)\,N)\ d_{\bar{D}}(r) = 0 \quad ,$$

et $d_{\bar{D}}(r)$ est un vecteur normé, base du noyau de $\overset{(\bar{D})}{H}(r)$ qui est de dimension 1, puisque pour r petit, $r \neq 0$, les racines $\lambda^{\bar{D}}(r)$ sont distinctes du fait de l'hypothèse faite sur μ'.

Pour montrer que les $(d_{\bar{D}}(0))$ forment une base de $H(\eta)$, on remarque que la définition 5 implique que $|\text{dét}\ \Delta(\xi')|$ doit être uniformément minoré par $\varepsilon' > 0$ pour ξ' voisin du point η' considéré ici.

<u>Notation</u> - On notera les vecteurs ainsi obtenus :

$$d_{\bar{D}}(0) = d_{\mu'\,\bar{D}} \qquad g^{\bar{C}}(0) = g^{\bar{C}}_{\mu'}$$

On posera aussi : $\mathcal{H}_{\eta\mu'}(\xi) = \mathcal{H}_{\eta}(d_{\mu'}, g_{\mu'}, \xi)$ (cf. Déf. 6).

Nous indiquerons quelques propriétés des matrices localisées $\mathcal{H}_{\eta\mu'}$. Les démonstrations sont analogues à celles de ([11]).

<u>Lemme</u> 12 - Si $\bar{C} \neq \bar{D}$, $\mathcal{H}_{\eta\mu'}{}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(N) = 0$

$$\mathcal{H}_{\eta\mu'}{}^{\bar{C}}_{\bar{D}}(\mu') = 0$$

<u>Lemme</u> 13 - On pose, $\forall \bar{C}$, $\forall \alpha$:

$$p^{\alpha\,\bar{C}}(r) = \frac{(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \det H)\ (\eta + r\,\mu' + \lambda^{\bar{C}}(r)\,N)}{r^{k-1}} \quad , \quad \text{si } r \neq 0 \ ;$$

$$\overset{\bar C}{p}{}^{\alpha}(0) = \frac{1}{(k-1)!}\,\frac{d}{dr^{k-1}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\det H\right)(\eta + r\,\mu' + \lambda^{\bar C}(r)\,N)\right](0) \quad .$$

$\overset{\bar C}{p}$ est ainsi une fonction vectorielle à valeurs dans E, analytique en r ; pour chaque $r \neq 0$, $\overset{\bar C}{p}(r)$ est proportionnel au vecteur bicaractéristique classique ; la direction de $\overset{\bar C}{p}(0)$ est la limite de la direction du vecteur bicaractéristique classique si r tend vers 0.

On a, $\forall \bar C$, $\forall \alpha$:

$$g^{\bar C}(r)\,.\,\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} H(\eta + r\,\mu' + \lambda^{\bar C}(r)\,N)\,.\,d_{\bar C}(r) = \overset{\bar C}{\mathcal{C}}(r)\,.\,\overset{\bar C}{p}{}^{\alpha}(r) \quad ;$$

$\overset{\bar C}{\mathcal{C}}(r)$ est une fonction analytique de r pour r petit.

On a aussi :

$$\mathcal{H}_{\eta\mu'}{}^{\bar C}_{\bar C} = \overset{\bar C}{\mathcal{C}}(0)\;\overset{\bar C}{p}(0)$$

et

$$\mathcal{H}_{\eta\mu'}{}^{\bar C}_{\bar C}(N) \neq 0 \quad .$$

et $\forall \bar C$, $\mathcal{H}_{\eta\mu'}{}^{\bar C}_{\bar C}(\mu^{\bar C}) = 0$ ou encore : $\overset{\bar C}{p}(0)\;(\mu^{\bar C}) = 0$.

<u>Lemme</u> 14 - Si $d\left[(\det H)_\eta\right] \geq \frac{k(k+1)}{2}$, alors la matrice $\mathcal{H}_{\eta\mu'}$ est symétrisable par une matrice diagonale.

$\mathcal{H}_{\eta\mu'}$ est fortement hyperbolique par rapport à N d'après le lemme 8 ; elle est donc diagonalisable ; de la proposition 1 résulte que :

$$d(\mathcal{H}_{\eta\mu'}) \geq \frac{k(k+1)}{2} \quad .$$

Les lemmes 12 et 13 impliquent que $\mathcal{H}_{\eta\mu'}(N)$ est diagonale et inversible. Du lemme 12 résulte que $\mathcal{H}_{\eta\mu'}(\mu')$ est diagonale. On a donc :

$$\mathcal{H}'_{\eta\mu'}(\mu') = \mathcal{H}^{-1}_{\eta\mu'}(N)\;\mathcal{H}_{\eta\mu'}(\mu') \quad .$$

Le lemme 13 implique que :

$$\mu_o^{\bar C} = -\,\frac{\mathcal{H}_{\eta\mu'}{}^{\bar C}_{\bar C}(\mu')}{\mathcal{H}_{\eta\mu'}{}^{\bar C}_{\bar C}(N)} \quad .$$

μ' annule donc tous les vecteurs du sous-espace engendré par les éléments non diagonaux de $\mathcal{H}'_{\eta\,\mu'}$, mais n'annule pas la différence de deux éléments non diagonaux, puisque $\bar{C} \neq \bar{D}$ implique $\mu_o^{\bar{C}} \neq \mu_o^{\bar{D}}$; la différence de deux éléments diagonaux de $\mathcal{H}'_{\eta\,\mu'}$ n'appartient donc pas au sous-espace engendré par les éléments non diagonaux.

Toutes les hypothèses de la proposition 3 sont réalisées et le lemme est démontré.

Théorème 1 - Si H est une matrice de polynômes homogènes de degré t fortement hyperbolique par rapport à $N \neq 0$, $\eta \neq 0$ un point multiple d'ordre k pour le déterminant de H , si la dimension réduite du polynôme $(\text{dét } H)_\eta$, localisé en η de dét H , est supérieure ou égale à $\frac{k(k+1)}{2}$, alors toute matrice localisée $\mathcal{H}_\eta$ de H en η est symétrisable :

$$\mathcal{H}_\eta^{-1}(N) \quad \mathcal{H}_\eta(\xi) = T^{-1}\, S(\xi)\, T \quad ,$$

ou T est réelle inversible, S symétrique ; la dimension réduite de $(\text{dét } H)_\eta$ est en fait égale à $\frac{k(k+1)}{2}$.

Du lemme 8 , de la proposition 2 et du lemme 10 résulte qu'il existe au moins un μ' tel que :

$$\forall \bar{C}\, ,\, \bar{D}\, ,\, \bar{C} \neq \bar{D} \quad ,$$

on ait :

$$\mu_o^{\bar{C}} \neq \mu_o^{\bar{D}} \quad .$$

Choisissons le ; la matrice $\mathcal{H}_{\eta\,\mu'}$ qui lui correspond est symétrisable :

$$\mathcal{H}'_{\eta\,\mu'} = D^{-1}\, S\, D \quad .$$

Si $\mathcal{H}_\eta$ est une matrice localisée quelconque, il résulte du lemme 7 que :

$$\mathcal{H}'_\eta = M^{-1}\, \mathcal{H}'_{\eta\,\mu'}\, M$$

d'où :

$$\mathcal{H}'_\eta = M^{-1}\, D^{-1}\, S\, D\, M$$

Remarque 3 - Les conditions du théorème 1 limitent évidemment k ; on a :

$$\frac{k(k+1)}{2} < n+1 \qquad \text{et} \qquad k \leqslant m \quad .$$

(1) ATIYA H, BOTT, GÅRDING - Acta mathematica 124, 1970, p. 109-189.

(2) KASAHARA et YAMAGUTI - Memoirs of the college of Science, Kyoto, série A, 33, Math n° 1 - 1960.

(3) P.D. LAX - Comm. Pure and Appl. Math. 11 - 1958 - p. 175-194.

(4) J. RIVERO et J. VAILLANT - Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris - 277 série A , 1973, p. 951.

(5) STRANG - J. Math. Kyoto University, 63 - 1967, p. 397-417.

(6) SVENSSON - Ark. Maths. 8 n° 17, 1970, p. 145-162.

(7) J. VAILLANT -Ann. Institut Fourier, Grenoble, t. 15, n° 2, 1965, p. 225-311.

(8) J. VAILLANT - J. Maths. pures et appliquées, t. 50, 1971, p. 25-51.

(9) J. VAILLANT - Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 284 série A , 1977, p. 489.

(10) D. LUDWIG et B. GRANOFF - J. Math Analysis and applications 21, 1968, p. 556-74.

(11) J. VAILLANT - J. Math. pures et appliquées 53, 1974, p. 71 à 98.

J. VAILLANT

U.E.R. de Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie
4, Place Jussieu

75230 PARIS CEDEX 05