Jean Leray

Analyse Lagrangienne et mécanique quantique

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 128-129
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____128_0>

ANALYSE LAGRANGIENNE ET MECANIQUE QUANTIQUE

(Notions apparentées à celles de développement asymptotique et d'indice de Maslov)

par

Jean LERAY

Les physiciens n'emploient les solutions exactes, $u(x)$, des problèmes d'évolution que dans les cas les plus simples. Généralement ils recourent à des "solutions asymptotiques" du type

$$u(\nu,x) = \alpha(\nu,x)e^{\nu\varphi(x)} , \tag{1}$$

où le "phase" φ est une fonction de $x \in X = \mathbb{R}^{\ell}$ à valeurs réelles ; ℓ' "amplitude" α est une série formelle en $1/\nu$:

$$\alpha(\nu,x) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\alpha_r(x) ,$$

dont les coefficients α_r sont des fonctions de x à valeurs complexes ; la "fréquence" ν est un paramètre imaginaire pur.

L'équation différentielle régissant l'évolution :

$$a(x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})u(\nu,x) = 0 \tag{2}$$

est vérifiée en ce sens que son premier membre est le produit par $e^{\nu\varphi}$ d'une série formelle en $1/\nu$, dont les premiers termes ou tous les termes sont nuls.

La construction des ces solutions asymptotiques est depuis longtemps classique et a été récemment nommée méthode B.K.W. :

La phase φ vérifie une équation aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaire si l'opérateur a n'est pas d'ordre 1 ; l'amplitude α résulte d'une intégration le long de celles des caractéristiques de cette équation du premier ordre qui définissent φ .

En mécanique quantique, par exemple, on calcule d'abord comme si

$$\nu = \frac{i}{\hbar} \quad (2\pi\hbar : \text{constante de Planck})$$

était un infiniment grand tendant vers i^{∞} , puis on attribue finalement à ν sa valeur numérique ν_o .

Les physiciens construisent des solutions asymptotiques de problèmes d'équilibre et de problèmes périodiques, substituant ainsi, par exemple, aux problèmes de l'optique ondulatoire ceux de l'optique géométrique ; mais φ fait un saut et α présente des singularités sur l'enveloppe des caractéristiques définissant φ , par exemple, en optique géométrique, sur l'enveloppe des réyons lumineux, c'est-à-dire sur les caustiques, qui dont les images des sources de lumière ; cependant l'optique géométrique vaut au delà des caustiques.

En toute généralité, V. P. MASLOV a introduit un indice (dont I. V. ARNOLD a explicité la définition) qui décrit ces sauts de la phase et, par un emploi approprié de la transformation de Fourier, il a montré que ces singularités de l'amplitude ne sont que des singularités apparentes ; mais il est obligé d'imposer certaines "conditions quantiques" ; leur énoncé suppose que ν est un nombre imaginaire pur donné ν_o ; c'est contraire à l'hypothèse que ν est une variable tendant vers i^{∞} ; cette dernière hypohtèse est cependant nécessaire pour que la transformation de Fourier soit ponctuelle, ce que V. P. MASLOV utilise de façon essentielle. Un emploi qui évite cette contradiction et que guident des motivations mathématiques, de la transformation de Fourier, des expressions du type (1), des conditions quantiques de Maslov et de la donnée d'un nombre ν_o est possible s'il ne tente plus de définir une fonction ou une classe de fonctions par son développement asymptotique : il conduit à de nouvelles notions qui s'apparentent à la géométrie symplectique et dont l'intérêt ne pourra se révéler qu'à posteriori ; ce sera peut-être la mécanique quantique.

Un exposé détaillé de ces notions et de leurs applications sera publié sous forme de prépublication par le
- Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France
puis corrigé de quelques errata par la
- Recherche coopérative sur programme C.N.R.S., n° 25, I.R.M.A. de Strasbourg (7 rue Descartes).

HISTORIQUE. - I. V. ARNOLD m'a demandé à Moscou, en 1967, comment je comprendrais le traité de V. P. MASLOV : Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, M.G.U., Moscou 1965. L'exposé en question est donc une réponse, peut-être inachevée, à cette question.

Collège de France, Paris.